CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 5– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Esercizio 5.1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali null(A) = null(B) = 0.
b) Sia $C = AB$. Stabilire se il sistema lineare $Cx = 0$ ha soluzione unica quando $k = 0$.

Esercizio 5.2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.
b) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme Sol$(Ax = b)$.

Esercizio 5.3. *[v. 7.62]* Sia A la matrice reale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.
b) Calcolare null(A) e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.

Esercizio 5.4. *[6.4]* Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Esercizio 5.5. *[6.7]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
b) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.

Esercizio 5.6. *[6.9]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.
b) Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

Esercizio 5.7. *[v. 6.6]* Dato $k \in \mathbb{R}$, si considerino le seguenti matrici reali

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è invertibile.
b) Trovare la matrice inversa di A_1, per $k = 1$.
c) Risolvere l'equazione matriciale $A_1X + B = 0$,con X matrice reale 3×3.

Esercizio 5.8. *[6.11]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.
b) Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.

Esercizio 5.9. Sia A una matrice reale invertibile che soddisfa l'equazione $2A^2 - A - I = 0$. Esprimere l'inversa A^{-1} di A in funzione di A. È possibile determinare A e la sua inversa?

Esercizio 5.10. *[v. 7.93]* Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca per quali valori di k la matrice D è combinazione lineare di A, B e C. In tali casi si esprima D come combinazione lineare di A, B e C.

Esercizio 5.11. *[5.16]* Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.
b) Per il valore trovato in a) esprimere B come combinazione lineare di A e C.

Esercizio 5.12. *[5.17]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di $A,\ B,\ C$.

Esercizio 5.13. *[7.22]* Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0, k^2+2, 3), \qquad v_4 \equiv (1, k+3, k^2+2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 al variare del parametro k.

Esercizio 5.14. *[7.25]*

a) Mostrare che i vettori

$$v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (-1,k,0), \quad v_3 = (1,1,k)$$

sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.
b) Esprimere il vettore $v = (2,1,2)$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

Esercizio 5.15. *[5.19]* Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.