

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 3- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012 /13

Esercizio 3.1. [1.7] Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

Esercizio 3.2. [1.8] Date le seguenti matrici A , calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3.3. [1.9] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB , BA , BC e CB .

Esercizio 3.4. [1.10] Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I .

Esercizio 3.5. [1.11] Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.

Esercizio 3.6. [1.12] Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda, x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.7. [1.13] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Esercizio 3.8. [1.14] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A , B , C .

Esercizio 3.9. [1.15] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A , B . In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Esercizio 3.10. [1.16] Si considerino le seguenti n -uple di numeri reali, con $n = 2, 3$ o 4 :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0) & u_2 &= \left(\frac{1}{2}, -2\right) \\ u_3 &= \left(-3, \frac{1}{4}, -5\right) & u_4 &= \left(0, -\frac{1}{2}, -2\right) \\ u_5 &= (-1, 1, 2, -2) & u_6 &= \left(0, 0, -\frac{1}{3}, -3\right) \end{aligned}$$

Si calcoli quando possibile

$$u_i + u_j, \quad u_i \cdot u_j^T, \quad \lambda \cdot u_i, \quad \text{con } \lambda = 0, 2, -2, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

Esercizio 3.11. [1.18] Si risolva il sistema $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3.12. [1.20] Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$