CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI E ENDOMORFISMI – GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare (endomorfismo) e M la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Parleremo quindi indifferentemente di T e M.

Il **Polinomio caratteristico** di M è il polinomio

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$$

Notiamo che $p_M(\lambda)$ è un polinomio di grado n nell'incognita λ.

Un **Autovalore** di M è un numero λ per cui esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ **non nullo** tale che

$$Mv = \lambda v$$

Osservazioni:

- Se λ è un autovalore di M allora per qualche $v \neq 0$:
  $$Mv = \lambda v \;\Rightarrow\; (M - \lambda I)\, v = 0 \;\Rightarrow\; v \in \ker(M - \lambda I) \;\Rightarrow\; \det(M - \lambda I) = 0$$
  quindi gli autovalori di M sono gli **zeri del polinomio caratteristico**, ovvero si determinano risolvendo
  $$\det(M - \lambda I) = 0$$
- La molteplicità di λ come zero del polinomio caratteristico è detta **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ.

Un **Autovettore** relativo a un autovalore λ è un vettore v (e sicuramente ne esistono non nulli) tale che

$$Mv = \lambda v \;\Rightarrow\; (M - \lambda I)\, v = 0 \;\Rightarrow\; v \in \ker(M - \lambda I)$$

Quindi v è **soluzione del sistema omogeneo associato a** $M - \lambda I$.

Osservazioni:

- L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore λ formano uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbb{R}^n$), detto **Autospazio** relativo all'autovalore λ:
  $$E(\lambda) = \{ \text{ autovettori relativi a } \lambda \ \}$$
- Chiamiamo **Molteplicità geometrica** di λ la dimensione di $E(\lambda)$.
- Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$ formano il nucleo di M, ovvero le soluzioni del sistema omogeneo associato a M: $\quad E(0) = \ker(M)$.
- Per quanto riguarda la dimensione di $E(\lambda)$ abbiamo che
  $$1 \leq \dim(E(\lambda)) \leq \text{molteplicità algebrica di } \lambda$$
  In particolare se un autovalore è singolo, allora il relativo autospazio ha sicuramente dimensione 1.
- Autovettori di autospazi distiniti sono linearmente indipendenti.
- Poichè gli endomorfismi sono applicazioni di uno spazio in se stesso, la base dello spazio di arrivo e di partenza è sempre la stessa (a differenza di quanto poteva accadere negli esercizi del capitolo precedente).

Diagonalizzabilità.

Una matrice M, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se è **simile a una matrice diagonale** D, ovvero esiste una matrice P, detta **matrice diagonalizzante**, tale che $P^{-1}MP = D$ è una matrice diagonale.

Osservazioni:

- Poiché $P^{-1}MP = D$, le matrici M e D sono simili.
- La matrice diagonalizzante P ha per colonne autovettori linearmente indipendenti di M.
- $P^{-1}MP = D$ ha sulla diagonale gli autovalori di M.
- Una matrice M, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è n, ovvero se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è n, ovvero se ha n autovettori linearmente indipendenti.
- Condizione necessaria perchè una matrice sia diagonalizzabile è che **la molteplicità algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidano**.
- Se M ha n autovalori distinti allora è sicuramente diagonalizzabile (infatti ha sicuramente n autospazi di dimensione 1).
- Se una matrice M è diagonalizzabile allora esiste una **base di** $\mathbb{R}^n$ **formata da autovettori di** M. La diagonalizzazione sottintende infatti un cambiamento di base in $\mathbb{R}^n$.
- Due matrici diagonalizzabili sono associate allo stesso endomorfismo (rispetto a basi differenti) se sono simili alla stessa matrice diagonale (ovvero hanno gli stessi autovalori). Analogamente se solamente una delle due matrici è diagonalizzabile allora non possono essere associate allo stesso endomorfismo.
- Le matrici e gli endomorfismi simmetrici godono di particolari proprietà.