

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.**

FOGLIO DI ESERCIZI 10- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

**Esercizio 10.1** (10.6). *Determinare il valore del parametro  $k \in \mathbb{R}$  tale che i vettori*

$$v = (1, 3, 7, -1), \quad w = (3, 5, 1, k)$$

*siano ortogonali.*

SOLUZIONE:

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero.

$$(v, w) = 3 + 15 + 7 - k = 25 - k \Rightarrow (v, w) = 0 \text{ se } k = 25$$

Quindi  $v$  e  $w$  sono ortogonali se  $k = 25$

□

**Esercizio 10.2** (10.9). *Siano  $u = (4, 2, -2)$  e  $v = (3, -3, 2)$  vettori di  $\mathbb{R}^3$ .*

- a) *Calcolare le lunghezze di  $u$  e di  $v$  (rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^3$ ).*
- b) *Trovare tutti i vettori  $w$  di lunghezza 1 ortogonali a  $u$  e a  $v$ .*

SOLUZIONE:

- a) Ricordiamo che  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ , quindi:

$$\|u\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{22}$$

- b) Si  $w = (x, y, z)$  il generico vettore di  $\mathbb{R}^3$  e imponiamo la condizione che sia ortogonale a  $u$  e a  $v$ , ovvero  $(u, w) = (v, w) = 0$ :

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema considerando la matrice associata

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2}I \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 7x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 7t \\ z = 2t + 7t = 9t \end{cases}$$

Quindi il generico vettore  $w$  ortogonale a  $u$  e  $v$  è del tipo

$$(t, 7t, 9t)$$

Imponiamo ora la condizione che  $w$  abbia norma 1:

$$\sqrt{t^2 + (7t)^2 + (9t)^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{131t^2} = 1 \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{131}}$$

Quindi abbiamo due possibili scelte per  $w$ :

$$w = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{131}}, \frac{7}{\sqrt{131}}, \frac{9}{\sqrt{131}} \right)$$

□

**Esercizio 10.3** (10.7). *Siano assegnati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$ :*

$$v = (2, -1, 0, 1), \quad w = (-1, 2, 0, 2)$$

- a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
- b) *Si determini la proiezione ortogonale di  $v$  su  $w$ .*
- c) *Si scriva  $v$  come somma di un vettore  $v_1$  multiplo di  $w$  e di un vettore  $v_2$  ortogonale a  $w$ .*

SOLUZIONE:

a) Se indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo (convesso) tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Poiché

$$(v, w) = -2 - 2 + 2 = -2, \quad \|v\| = \sqrt{6}, \quad \|w\| = \sqrt{9} = 3,$$

otteniamo

$$\cos(\vartheta) = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot 3} = -\frac{2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

e

$$\vartheta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right), \quad \text{con } 0 \leq \vartheta < \pi$$

b) La proiezione ortogonale di  $v$  su  $w$  è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che  $pr_w(v)$  è un vettore multiplo di  $w$ .

Sappiamo già che  $(v, w) = -2$ , inoltre  $(w, w) = \|w\|^2 = 3^2 = 9$ , quindi

$$pr_w(v) = \frac{-2}{9} \cdot w = \left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0, -\frac{4}{9}\right)$$

c) Dalla teoria sappiamo che il vettore  $v - pr_w(v)$  è un vettore ortogonale a  $w$  (è comunque immediato verificarlo), quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} v_1 &= pr_w(v) && \text{multiplo di } w \\ v_2 &= v - pr_w(v) && \text{ortogonale a } w \\ v_1 + v_2 &= v \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0, -\frac{4}{9}\right) \\ v_2 &= \left(\frac{16}{9}, -\frac{5}{9}, 0, \frac{13}{9}\right) \end{aligned}$$

□

**Esercizio 10.4** (10.8). *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^3$*

$$v = (3, 4, -2), \quad w = (2, 1, -1)$$

SOLUZIONE:

- La proiezione ortogonale di  $v$  su  $w$  è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che  $pr_w(v)$  è un vettore multiplo di  $w$ .

$$\begin{aligned} (v, w) &= 12 \\ (w, w) &= 6 \end{aligned}$$

quindi

$$pr_w(v) = \frac{12}{6} \cdot w = (4, 2, -2)$$

- Dalla teoria sappiamo che il vettore  $v - pr_w(v)$  è un vettore ortogonale a  $w$ , quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} v_1 &= pr_w(v) && \text{multiplo di } w \\ v_2 &= v - pr_w(v) && \text{ortogonale a } w \\ v_1 + v_2 &= v \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}v_1 &= (4, 2, -2) \\v_2 &= (-1, 2, 0)\end{aligned}$$

□

**Esercizio 10.5** (10.11). *Data la base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, 1)\}$$

di  $\mathbb{R}^3$ , si determini una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da  $\mathcal{B}$ .

SOLUZIONE:

Sia  $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$  la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base  $\mathcal{B}$ .

Costruiamo prima una base  $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$  di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}w_1 &= v_1 = (-1, 0, 1) \\w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0, 1, 0) - 0 \cdot w_1 = (0, 1, 0) \\w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\&= (1, 0, 1) - 0 \cdot w_1 - 0 \cdot w_2 = (1, 0, 1)\end{aligned}$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori  $u_i$  paralleli a  $w_i$ , ma di norma 1:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\u_2 &= w_2 = (0, 1, 0) \\u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  sono già ortogonali, quindi era sufficiente normalizzarli per ottenere a partire da essi una base ortonormale.

□

**Esercizio 10.6** (10.12). *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

SOLUZIONE:

Sia  $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$  la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base  $\mathcal{B}$ . Per facilitare i conti scambiamo innanzitutto l'ordine di  $v_1, v_2$  e  $v_3$  in  $\mathcal{B}$  (cambiando i nomi per evitare confusioni):

$$\mathcal{B} = \{v'_1 = (0, 0, 1), v'_2 = (0, 1, 1), v'_3 = (1, 1, 1)\}$$

Come nell'esercizio precedente costruiamo prima una base  $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$  di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}w_1 &= v'_1 = (0, 0, 1) \\w_2 &= v'_2 - pr_{w_1}(v'_2) = v'_2 - \frac{(v'_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{1} \cdot (0, 0, 1) = (0, 1, 0) \\w_3 &= v'_3 - pr_{w_1}(v'_3) - pr_{w_2}(v'_3) = v'_3 - \frac{(v'_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v'_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\&= (1, 1, 1) - \frac{1}{1} \cdot (0, 0, 1) - \frac{1}{1} \cdot (0, 1, 0) = (1, 0, 0)\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso i vettori ottenuti hanno già norma 1, quindi

$$u_1 = w_1 = (0, 0, 1), \quad u_2 = w_2 = (0, 1, 0), \quad u_3 = w_3 = (1, 0, 0)$$

Infine

$$\mathcal{B}' = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

□

**Esercizio 10.7** (10.15). *Si considerino i vettori di  $\mathbb{R}^3$*

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

- Calcolare le lunghezze di  $v_1$  e di  $v_2$ .
- Determinare la proiezione ortogonale di  $v_1$  su  $v_2$ .
- Trovare una base ortonormale del sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori  $v_1$  e  $v_2$ .

SOLUZIONE:

a)

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

b)

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{4}{3} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

- c) Sia  $\{u_1, u_2\}$  la base ortonormale cercata. La cosa più semplice per sfruttare i conti già fatti è considerare il seguente vettore  $u_1$ , parallelo a  $v_2$  e di norma 1:

$$u_1 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Inoltre il seguente vettore  $w_2$  è ortogonale a  $v_2$ , e quindi a  $u_1$ :

$$w_2 = v_1 - (v_1, u_1) \cdot u_1 = v_1 - pr_{v_2}(v_1) = (1, 2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Notiamo che  $w_2$  è parallelo a  $(-1, 2, -1)$ , quindi al seguente vettore di norma 1:

$$u_2 = \frac{(-1, 2, -1)}{\|(-1, 2, -1)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Infine la base ortogonale cercata è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

□

**Esercizio 10.8** (10.16). *Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  costituito dai vettori  $(x_1, x_2, x_3)$  tali che  $2x_1 + x_2 = 0$ . Si determini una base ortonormale di  $U$  rispetto al prodotto scalare ordinario di  $\mathbb{R}^3$ .*

SOLUZIONE:

Gli elementi di  $U$  sono i vettori di  $\mathbb{R}^3$  tali che  $2x_1 + x_2 = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$U = \langle (1, -2, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Poichè i due generatori sono tra loro ortogonali, per ottenere una base ortonormale di  $U$  è sufficiente prenderli di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), (0, 0, 1) \right\}$$

□

**Esercizio 10.9** (10.21). Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione lineare tale che

$$T(1, -2, 1) = (2, 1), \quad T(1, 0, 0) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$

- a) Che dimensione ha l'immagine di  $T$ ?  
 b) Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^3$ ) del nucleo di  $T$ .

SOLUZIONE:

Per risolvere l'esercizio possiamo procedere in due modi:

- (1) Determinare la matrice  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$  associata a  $T$  rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{ (1, -2, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$$

di  $\mathbb{R}^3$  e alla base canonica  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^2$ , tenendo poi conto che i vettori ottenuti nello spazio di partenza  $\mathbb{R}^3$  (in particolare il Nucleo) saranno espressi rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

- (2) Ricavare l'azione di  $T$  sugli elementi della base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e determinare quindi la matrice  $B = M(T)$  associata a  $T$  rispetto alle basi canoniche.

Consideriamo entrambi i metodi.

- (1) Con il primo metodo consideriamo la matrice  $A$  associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^2$ :

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) La dimensione dell'immagine di  $T$  corrisponde al rango di  $A$ . Poichè  $A$  contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

di determinante  $2 \neq 0$ , la matrice  $A$  ha rango 2, quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

- b) Per determinare il nucleo di  $T$  risolviamo il sistema omogeneo associato a  $A$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2(-2t) - t = -5t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi  $N(T)$  è generato dal vettore  $(-2, 1, -5)_{\mathcal{B}}$ , espresso però rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Rispetto alla base canonica tale vettore corrisponde al vettore

$$-2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 5 \cdot v_3 = (-1, -1, -2)$$

Infine

$$N(T) = \langle (-1, -1, -2) \rangle$$

Poichè il nucleo ha dimensione uno per determinarne una base ortonormale è sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

- (2) Con il secondo metodo ricaviamo invece la matrice associata a  $T$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ , calcolando le immagini di  $e_1, e_2, e_3$ . Poichè conosciamo già  $T(e_1) = (-1, 2)$  e  $T(e_2) = (-1, 0)$ , dobbiamo solo ricavare  $T(e_3)$ . Sfruttando la linearità di  $T$  otteniamo:

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= T(1, -2, 1) - T(1, 0, 0) + 2T(0, 1, 0) \\ &= (2, 1) - (-1, 2) + 2(-1, 0) = (1, -1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice  $B$  associata a  $T$  rispetto alle basi canoniche è

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II + 2I \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di  $T$  corrisponde al rango di  $B$ , quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di  $T$  risolviamo il sistema omogeneo associato a  $B$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$N(T) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

Notiamo che in questo caso il generatore è già espresso rispetto alla base canonica, è quindi sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

□

**Esercizio 10.10** (11.1). [Esercizio 15] cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] Calcolare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice  $A$  calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1 - \lambda)(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2 \cdot 2(-1 - \lambda) = (-1 - \lambda)[(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4] \\ &= (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \end{aligned}$$

Gli autovalori di  $A$  sono i valori di  $\lambda$  per cui  $p_A(\lambda) = 0$ , quindi

$$\lambda_1 = -1 \quad (\text{doppio}), \quad \lambda_2 = 3$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = -1$ . Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a  $A + I$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow 2x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow E(-1) = \langle (-1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Poichè dalla teoria sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, ci aspettavamo che l'autovalore  $\lambda = -1$  avesse molteplicità geometrica 2.

- $\lambda = 3$ . Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a  $A - 3I$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow E(3) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (-1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo  $A$  una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Inoltre, in questo caso,

anche i due autovettori relativi allo stesso autovalore  $\lambda = -1$  risultano ortogonali:  $(v_1, v_2) = 0$ . Per determinare la base ortonormale richiesta è quindi sufficiente normalizzare i tre vettori  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0, 0, 1) \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è } \mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

Ripetiamo ora l'esercizio con la matrice  $B$ . Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice  $B$  calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= (1 - \lambda)[(-2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1] - 3 \cdot 3(1 - \lambda) = (1 - \lambda)[(-2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 - 9] \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12) \end{aligned}$$

Gli autovalori di  $B$  sono i valori di  $\lambda$  per cui  $p_B(\lambda) = 0$ , quindi

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -4$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = 1$ . Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a  $B - I$ :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow E(1) = \langle (1, 0, 3) \rangle \end{aligned}$$

- $\lambda = 3$ . Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a  $B - 3I$ :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] &\Rightarrow 2II + 3I \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle (-3, -2, 1) \rangle \end{aligned}$$

- $\lambda = -4$ . Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a  $B + 4I$ :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] &\Rightarrow 5II - 3I \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E(-4) = \langle (-3, 5, 1) \rangle \end{aligned}$$

Siano

$$v_1 = (1, 0, 3), \quad v_2 = (-3, -2, 1), \quad v_3 = (-3, 5, 1)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo  $B$  una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Per determinare la base

ortonormale richiesta si tratta quindi di normalizzare i tre vettori  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left( -\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right) \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left( -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}} \right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è } \mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

□

**Esercizio 10.11** (11.2). Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche  $A$  si determini una matrice ortogonale  $P$  per la quale  $P^T A P$  sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Poichè entrambe le matrici  $A$  sono simmetriche, sappiamo dalla teoria che sono sicuramente diagonalizzabili. Si tratta di

- (1) Determinare gli autovettori di  $A$ ,
- (2) Determinare una base ortonormale a partire dagli autovettori (linearmente indipendenti) di  $A$ ,
- (3) Scrivere la matrice  $P$  che ha per colonne gli elementi della base trovata.

La matrice  $P$  così determinata è diagonalizzante e ortogonale.

Consideriamo prima la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- (1)  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 \Rightarrow$  autovalori:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -3$

- $\lambda = 2$ . Consideriamo  $A - 2I$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E(2) = \langle (2, 1) \rangle$$

- $\lambda = -3$ . Consideriamo  $A + 3I$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E(-3) = \langle (1, -2) \rangle$$

- (2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{aligned} v_1 &= (2, 1), & v_2 &= (1, -2) & \Rightarrow \\ u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), & u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

- (3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1)  $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \Rightarrow$  autovalori:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 0$



- $\lambda = 1$ . Consideriamo  $A - I$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

- $\lambda = 3$ . Consideriamo  $A - 3I$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow 2III + I \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(3) = \langle (-1, 1, -2) \rangle$$

- $\lambda = 0$ . Consideriamo  $A - 0I$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow III - I \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(0) = \langle (-1, 1, 1) \rangle$$

- (2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0) & u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ v_2 &= (-1, 1, -2) & u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \\ v_3 &= (-1, 1, 1) & u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

- (3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 10.12** (11.3). Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  con matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

- Stabilire se l'endomorfismo  $T$  è diagonalizzabile.
- Trovare basi ortonormali degli autospazi di  $T$  (rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^3$ ).
- Trovare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $T$ .

SOLUZIONE:

- L'endomorfismo  $T$  è sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrico.
- Calcoliamo gli autovalori di  $T$ :

$$p_A(\lambda) = (4 - \lambda)[(5 - \lambda)^2 - 1] = (4 - \lambda)^2(6 - \lambda)$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{doppio}$$

$$\lambda_2 = 6$$

Calcoliamo ora gli autospazi.

Risolviamo il sistema omogeneo associato a  $A - 4I$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \text{III} + \text{II} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y - z = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} &\Rightarrow E(4) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Notiamo che, anche senza avere osservato che  $T$  è simmetrico, a questo punto possiamo concludere che  $T$  è diagonalizzabile in quanto la molteplicità geometrica del suo unico autovalore doppio è 2.

Inoltre i due vettori presi come generatori sono tra loro ortogonali, è perciò sufficiente normalizzarli per ottenere una base ortonormale di  $E(4)$ :

$$\mathcal{B}(E(4)) = \left\{ (1, 0, 0), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a  $A - 6I$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \text{III} - \text{II} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} &\Rightarrow E(6) = \langle (0, -1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Una base ortonormale di  $E(6)$  è:

$$\mathcal{B}(E(6)) = \left\{ \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

c) L'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ (1, 0, 0), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $T$ .

□

**Esercizio 10.13** (11.5). *Sia  $A$  la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

*Trovare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  costituita da autovettori di  $A$ .*

SOLUZIONE:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di  $A$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (6 - \lambda)(5 - \lambda)(9 - \lambda) - 2 \cdot 2(5 - \lambda) = (5 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4) \\ &= -(\lambda - 5)^2(\lambda - 10) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di  $A$  sono

$$\lambda = 10, \quad \lambda = 5 \quad (\text{doppio})$$

Calcoliamo i due autospazi.

$E(10)$ . Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice  $A - 10I$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{1/2I} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 1/2I} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow E(10) &= \langle (1, 0, -2) \rangle \end{aligned}$$

$E(5)$ . Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice  $A - 5I$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III + 2I \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E(5) = \langle (2, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$$

Una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $T$  è data dall'insieme

$$\{ (1, 0, -2), (2, 0, 1), (0, 1, 0) \}.$$

Notiamo che tali vettori sono già tra loro ortogonali, è quindi sufficiente normalizzarli. Una base ortonormale è quindi data dall'insieme

$$\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), (0, 1, 0) \right\}.$$

□

**Esercizio 10.14** (11.9). Si consideri il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax, bx + y + z, y + z)$$

con  $a$  e  $b$  parametri reali.

- Si discuta la diagonalizzabilità di  $T$  al variare di  $a$  e  $b$  in  $\mathbb{R}$ .
- Posto  $a = b = 0$  si determini una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $T$ .

SOLUZIONE:

Determiniamo la matrice  $A = M(T)$  associata a  $T$  rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  è  $P_A(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$ , quindi gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda = a, 0, 2$ .

- Se  $a \neq 0, 2$ ,  $T$  ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.  
Se  $a = 0$ , l'autovalore  $\lambda = 0$  è doppio, quindi per stabilire se  $T$  è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio  $E(0)$ :

$$E(0) = N(A) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - III \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi

- Se  $a = 0$  e  $b = 0$  l'autospazio  $E(0)$  ha dimensione 2, quindi  $T$  è diagonalizzabile.
- Se  $a = 0$  e  $b \neq 0$  l'autospazio  $E(0)$  ha dimensione 1, quindi  $T$  non è diagonalizzabile.

Analogamente se  $a = 2$ , l'autovalore  $\lambda = 2$  è doppio, quindi per stabilire se  $T$  è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio  $E(2)$ :

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi

- Se  $a = 2$  e  $b = 0$  l'autospazio  $E(2)$  ha dimensione 2, quindi  $T$  è diagonalizzabile.
- Se  $a = 2$  e  $b \neq 0$  l'autospazio  $E(2)$  ha dimensione 1, quindi  $T$  non è diagonalizzabile.

Infine  $T$  è diagonalizzabile se  $a \neq 0, 2$  per ogni valore di  $b$ , oppure se  $a = 0$  o  $a = 2$  e  $b = 0$ .

- Per  $a = b = 0$  abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0, 1, -1), (1, 0, 0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per  $a = b = 0$  otteniamo:

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \left\{ \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (1, 0, 0), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

□

**Esercizio 10.15** (11.13). Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2 + \sqrt{3}x_3, \sqrt{3}x_2)$$

- Stabilire se  $T$  è invertibile.
- Mostrare che  $T$  è un endomorfismo simmetrico.
- Trovare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  che diagonalizza  $T$ .

SOLUZIONE:

La matrice associata a  $T$  rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

- $T$  è invertibile se è invertibile la matrice  $A$ , cioè se  $A$  ha determinante non nullo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

- La matrice associata a  $T$  rispetto alla base canonica (che è ortonormale) è simmetrica:  $A^T = A$ , quindi  $T$  è un endomorfismo simmetrico.

- Calcoliamo il polinomio caratteristico di  $A$ :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda) \cdot [(2 - \lambda)(-\lambda) - 3] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda = 2, -1, 3$ .

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

$$E(-1) = N(A + I) : \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{3}III - II \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{3}}t = -\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow E(-1) = \langle (0, 1, -\sqrt{3}) \rangle$$

$$E(3) = N(A - 3I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow III + \sqrt{3}II \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (0, \sqrt{3}, 1) \rangle$$

Essendo tre autospazi distinti i tre autovalori generatori trovati sono tra loro ortogonali. Per ottenere la base ortonormale cercata basta quindi prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \left\{ (1, 0, 0), \left( 0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left( 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

□