# CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

**Esercizio 7.1** (6.2)**.** *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Cominciamo dalle matrici $2 \times 2$:

$$\det(A_1) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$
$$\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3$$
$$\det(A_3) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Consideriamo ora le matrici $3 \times 3$.

Per la matrice $A_4$ sviluppiamo il determinante rispetto alla prima colonna:

$$\det(A_4) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (10) = 10$$

Per la matrice $A_5$ possiamo sviluppare il determinante indifferentemente rispetto alla prima colonna o alla prima riga:

$$\det(A_5) = -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

Per la matrice $A_6$ ci conviene sviluppare il determinante rispetto alla seconda colonna:

$$\det(A_6) = -(-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot (7-4) + 1 \cdot (7-6) = 3 + 1 = 4$$

$\square$

**Esercizio 7.2** (6.3)**.** *Calcolare il rango della seguente matrice $A$, utilizzando il calcolo del determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Soluzione:

Per calcolare il rango di $A$ utilizziamo la seguente proprietà.

---

Il rango di una matrice $A$ corrisponde al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di $A$ con deteminante non nullo.

---

Cominciamo quindi a calcolare il determinante di $A$ per stabilire quando $\text{rg}(A) = 3$.

Sviluppiamo rispetto alla terza colonna:

$$\det(A) = -(4-k) \cdot [2k - 3 - (k+2)] = (k-4)(k-5)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se $k = 4$ o $k = 5$.

Di conseguenza:

- Se $k \neq 4,\ 5$, la matrice ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 4$ la matrice $A$ diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo già che $\text{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice $2 \times 2$ con determinante non nullo. In effetti in $A$ troviamo per esempio la sottomatrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(B) = -15 \cdot 6 \neq 0$$

quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$.

- Se $k = 5$ la matrice $A$ diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo già che $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice $2 \times 2$ con determinante non nullo. In effetti in $A$ troviamo per esempio la sottomatrice:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(C) = 7 \neq 0$$

quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$.

□

**Esercizio 7.3** (6.7)**.** *Sia $A$ la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di $k$ la matrice $A$ è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di $A$ per $k = -1$.*

b) *Calcolare il rango di $A$ al variare del parametro $k$.*

Soluzione:

a) Una matrice quadrata è invertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di $A$ sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = (2k-2) \cdot [k(2-k) - k] = (2k-2)(-k^2 + k)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se

$$2k - 2 = 0 \;\Rightarrow\; k = 1$$
$$-k^2 + k = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \text{ o } k = 1$$

Infine $A$ è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di $A$ quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} -I \\ -1/4II \\ III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III + 4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} I - 2II \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} I - III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Abbiamo visto che se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante non nullo, quindi in questi casi $\mathrm{rg}(A) = 3$. Inoltre:

- Se $k = 0$, $A$ diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ 1/2II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2$$

- Se $k = 1$, $A$ diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 1$$

□

**Esercizio 7.4** (7.5)**.** *Si dica per quali valori di $k$ il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx+y+z=1-k \\ y+(1-k)z=1 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

*ammette un'unica soluzione.*

Soluzione:

Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ \\ III+(k-1)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione se il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa sono entrambi tre. Dalla matrice ridotta questo avviene per $k \neq 0, 2$.

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che per $k = 2$ il sistema non ammette soluzione, mentre per $k = 0$ ne ammette infinite.

In alternativa potevamo calcolare il rango della matrice ragionando sui determinanti:

$$\det(A) = 1 - k - 1 - k(1-k) = k^2 - 2k$$

Quindi se $k \neq 0, 2$, la matrice $A$ ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.

□

**Esercizio 7.5** (7.13)**.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky+z+w=2 \\ x+kz+2w=k \\ x+kw=0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di $k$ il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Soluzione:

La matrice associata a al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k \\ 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$. Utilizzando il determinante, ricordiamo che il rango di una matrice corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice quadrata con determinante diverso da zero. Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = (1+k) \cdot \det \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = (1+k)k^3$$

Quindi il sistema ammette una unica soluzione quando $k \neq 0, -1$.

b) Torniamo al sistema nel caso $k = 0$ (senza la necessità di ridurre la matrice associata):

$$\begin{cases} x=0 \\ z+w=2 \\ x+2w=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2 \\ w=0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

**Esercizio 7.6** (7.19). *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di $k$ lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.*
b) *Per i valori di $k$ esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Soluzione:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouchè-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di $A$ calcolandone il deteminante:

$$\det(A) = -(k+4)\cdot\det\begin{bmatrix} 2k & 1 & 2k+2 \\ 0 & k+4 & 0 \\ k & k+2 & k+3 \end{bmatrix} = -(k+4)^2\cdot[2k(k+3) - k(2k+2)] = -4k(k+4)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioé $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $k \neq 0, -4$.

b) Se $k = 0$ la matrice $A$ diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) : \begin{cases} x + 4y + 8w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 4z = 0 \\ 2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ N(A) = \{(-4,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Se $k = 0$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(-4,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Se $k = -4$ la matrice $A$ diventa

$$\begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 31II - 8I \\ \\ 2IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 31IV + 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -966 \end{bmatrix}$$

$$N(A) : \begin{cases} -31x + 4w = 0 \\ 31z - 218w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow\ N(A) = \{(0,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Se $k = -4$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

□

**Esercizio 7.7** (7.24). *Determinare per quali valori del parametro reale $k$ i seguenti vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.*

$$v_1 \equiv (1,2,-2), \qquad v_2 \equiv (1,1,-3), \qquad v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

Soluzione:

Sappiamo che tre vettori di $\mathbb{R}^3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & k-6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

Ragionando sui ranghi:

- Se $k \neq 1$ la matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3 e $v_1,\ v_2$ e $v_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.
- Se $k = 1$ la matrice ha 2 pivot, quindi ha rango 2 e $v_1,\ v_2$ e $v_3$ non formano una base di $\mathbb{R}^3$.

In alternativa potevamo calcolare il rango utilizzando il determinante:

$$\det(A) = (k-6+21) - (2k-12+14) + 3(-6+2) = -k+1$$

$v_1,\ v_2$ e $v_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ se la matrice associata ha rango 3, ovvero se ha determinante non nullo, cioè $k \neq 1$.

□

**Esercizio 7.8** (7.30)**.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \qquad v_2 \equiv (1,3,0,3), \qquad v_3 \equiv (-1,-2,1,-1).$$

*Determinare la dimensione e una base di $V$ al variare del parametro reale $k$.*

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice $A$ associata a tale insieme di vettori per stabilire se, o quali vettori sono linearmente indipendenti.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \\ 3k-2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Utilizziamo il determinante. Consideriamo la sottomatrice $B$ formata dalle prime 3 righe:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = -(k-1+2k^2-2) - (-3k^2+3) = k^2-k$$

il cui determinante si annulla per $k = 0, 1$. Quindi:

- Se $k \neq 0, 1$ la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Di conseguenza $\dim(V) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \left\{(0, k-1, k^2-1, 3k-2),\ (1,3,0,3),\ (-1,-2,1,-1)\right\}.$$
- Se $k = 0$ la matrice $A$ diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ IV-2I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III-II \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = \dim(V) = 2$. Inoltre
$$\mathcal{B}(V) = \{\ v_1,\ v_2\} = \{(0,-1,-1,-2),\ (1,3,0,3)\}$$
- Se $k = 1$ la matrice $A$ diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
Notiamo che $A$ contiene la sottomatrice $C$:
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1 \cdot 3 \neq 0$$
Quindi anche per $k = 1$, $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \{(0,0,0,1),\ (1,3,0,3),\ (-1,-2,1,-1)\}.$$

□

**Esercizio 7.9** (7.31)**.** *Sia $W$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:*

$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$

*Si calcoli la dimensione di $W$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice $A$ associata ai 4 vettori:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 3 & k & 1 \\ 1 & 4 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-I \\ IV+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & k \end{bmatrix}$$

Chiamiamo $A'$ la matrice ridotta così ottenuta. Sappiamo che $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$. Sappiamo inoltre che il rango di una matrice corrisponde, oltre che al numero di pivot, al massimo ordine di una sottomatrice con determinante non nullo. Senza proseguire ulteriormente nella riduzione possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta $A'$ per calcolarne il rango:

$$\det(A') = -1 \cdot (k+1) \cdot [(k-1)k - 2] = -(k+1)(k^2 - k - 2)$$

e $\det(A') = 0$ se $k = -1$ o $k = 2$. Di conseguenza

- Se $k \neq -1, 2$, $\det(A') \neq 0$, quindi la matrice $A$ ha rango 4, e $\dim(W) = 4$.
- Se $k = -1$ la matrice $A'$ ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione $A$ diventa

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

  Questa contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

  di determinante $-1(-2-5) \neq 0$.

  Quindi $A$ ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.
- Se $k = 2$ la matrice $A'$ ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione diventa

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

  Questa contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  di determinante $-3 \neq 0$.

  Quindi anche in questo caso $A$ ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.

In alternativa tutto l'esercizio poteva essere svolto completando la riduzione a gradini di $A$.

□

**Esercizio 7.10** (7.41)**.** *Si consideri l'insieme*

$$S = \{\ (k+1, k+1, 0, 2k),\ (0, 2k, 0, 0),\ (1, 3k, 0, 1),\ (1, 5k, 1, k)\ \}.$$

a) *Si stabilisca per quali valori di $k$ l'insieme $S$ è una base di $\mathbb{R}^4$.*

b) *Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ rispetto alla base trovata.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il determinante della matrice associata ai quattro vettori

$$\det \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ k+1 & 2k & 3k & 5k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2k & 0 & 1 & k \end{bmatrix} = 2k \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2k & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$= 2k \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 2k & 1 \end{bmatrix} = -2k(-k+1)$$

Se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante diverso da zero, quindi rango 4 e i vettori formano una base di $\mathbb{R}^4$.

b) Riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4 = v$ dove $v_1, v_2, v_3, v_4$ sono i vettori della base dopo avere posto $k = -1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + z - w = 1 \\ -2y - 3z - 5w = 1 \\ z + w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Infine le coordinate di $v$ rispetto alla base trovata sono

$$v = (0, -2, 1, 0)_S$$

$\square$