CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Esercizio 6.1 (7.27)**.** *Si consideri il sottospazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ *di* $\mathbb{R}^5$ *generato dai vettori*

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) *Trovare una base di* V.
b) *Determinare le coordinate del vettore* $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ *rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 affiancata dal vettore v per rispondere a entrambe le domande.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ II + I \\ \Rightarrow III + 2I \\ IV + I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1/2II \\ \Rightarrow 2III - II \\ IV - III \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il rango di A è 2 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.
b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 = v$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale equazione (basta ignorare la terza colonna relativa a v_3). quindi

$$\begin{cases} -x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow\ v = 2v_1 + 2v_2, \qquad v = (2, 2)_{\mathcal{B}}$$

□

Esercizio 6.2 (7.33)**.** *Si considerino i vettori di* $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \quad v_2 = (-2, -4, 2, -6), \quad v_3 = (3, 6, k - 6, 3k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *il vettore* v_3 *appartiene al sottospazio* $W = \langle v_1, v_2\rangle$ *generato da* v_1 *e* v_2.
b) *Si trovi, al variare di* k, *una base di* W *e una base del sottospazio* $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Soluzione:

a) Si tratta di stabilire quando il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, ovvero quando il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1+yv_2 = v_3$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ 2 & -4 & | & 6 \\ -1 & 2 & | & k-6 \\ 3 & -6 & | & 3k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + I \\ 1/3IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & k-3 \\ 0 & 0 & | & k-3 \end{bmatrix}$$

Infine
– Se $k \neq 3$, $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Di conseguenza v_3 non appartiene a W.
– Se $k = 3$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ e il sitema ammette (infinite) soluzioni. Di conseguenza v_3 appartiene a W.

b) Per determinare una base di W dobbiamo calcolare il rango della matrice associata a v_1 e v_2. Abbiamo già ridotto a gradini tale matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 1, quindi v_1 e v_2 non formano una base, sono infatti linearmente dipendenti. Di conseguenza uno solo dei vettori è sufficiente a generare tutto lo spazio e una base di W è data per esempio da $\{v_1\}$.

Determiniamo ora una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k = 3$, v_3 appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi se $k = 3$, $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = W$ e una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ è la stessa di W, quindi $\{v_1\}$. Analogamente la matrice, già ridotta, associata a v_1, v_2 e v_3 nel caso $k = 3$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = 1 \text{ e } \mathcal{B}(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = \{v_1\}$$

– Se $k \neq 3$, v_3 non appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi per ottenere una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ dobbiamo aggiungere alla base di W il vettore v_3, ottenendo quindi la base $\{v_1, v_3\}$. Analogamente la matrice, già ridotta, associata a v_1, v_2 e v_3 nel caso $k \neq 3$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = 2 \text{ e } \mathcal{B}(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = \{v_1,\ v_3\}$$

□

Esercizio 6.3 (7.33)**.** *Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 3, 0)$:*

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3\rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.*
(2) *Determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\rangle$.*

Soluzione:

Per potere rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + 2I \\ III - 4I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ IV \\ 1/3III \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 3II \\ IV - 7II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV + III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Possiamo ora risponedere alle domande.

(1) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale V calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$.

.

(2) Per determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V consideriamo la matrice completa e torniamo al sistema associato:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza il vettore v_4 appartiene a V:

$$v_4 = v_1 + v_2$$

(3) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\rangle$ consideriamo la matrice completa B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso la matrice ha 3 pivot, quindi

$$\dim(W) = \mathrm{rg}(B) = 3$$

Notiamo che potevamo risponedere a questa domanda semplicemente osservando che dal punto predente sappiamo che $v \in V$, quindi $W = V$ e $\dim(W) = \dim(V) = 3$.

□

Esercizio 6.4 (7.52). *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(1,1,2,1) + a_2(-1,0,-1,3) + a_3(2,0,0,0) + a_4(0,0,0,1)$$

Siano

$$v_1 = (1,1,2,1), \qquad v_2 = (-1,0,-1,3), \qquad v_3 = (2,0,0,0), \qquad v_4 = (0,0,0,1)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbb{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

□

Esercizio 6.5 (7.53). *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(1,1,2,1) + a_2(-1,0,-1,3) + a_3(2,0,0,0) + a_4(1,0,0,0)$$

Siano

$$v_1 = (1,1,2,1), \qquad v_2 = (-1,0,-1,3), \qquad v_3 = (2,0,0,0), \qquad v_4 = (1,0,0,0)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi
$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$
e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbb{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
La matrice ha rango 3 e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti tra loro, quindi una base può contenerne solo uno dei due; di conseguenza nella ricerca della base potevamo considerare dall'inizio solo i vettori v_1, v_2 e v_3 per verificare se sono linearmente indipendenti.

In alternativa si può utilizzare il determinante. $\det(A) = 0$, quindi i quattro vettori sono linearmente dipendenti e non possono formare una base di S. Osservando che v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti consideriamo la matrice formata da v_1, v_2 e v_3:
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
Il determinante della matrice quadrata B' formata dalle prime tre righe è
$$\det(B') = -2 \cdot (-1) = 2 \neq 0$$
quindi $\mathrm{rg}(B') = 3$ e v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Di conseguenza una base di S è l'insieme $\mathcal{B}(S) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

□

Esercizio 6.6 (7.56)**.** *Sia*
$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.*

b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:

Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbb{R}^3$ tali che
$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi
$$S = \{ \ (0, -t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$
E' ora evidente che ogni elemento di S si può scrivere nella forma
$$(0, -1, 1) \cdot t$$

quindi una base di S è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(0, -1, 1)\}$$

$\square$

Esercizio 6.7 (7.57). *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4ky - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 1$.
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III + 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$S = \{\ (2s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Separiamo le variabili nella scrittura del generico elemento di S:

$$(2s, s, 0) + (-t, 0, t) = (2, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 1) \cdot t$$

Quindi S è generato dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(2, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\}$$

Per come è stato calcolato, e comunque sarebbe immediato verificarlo, l'insieme $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, quindi si tratta effettivamente di una base di S.

$\square$

Esercizio 6.8 (7.63). *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*
b) *Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{r} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & -k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k - k^2 & -1 - k \end{bmatrix}$$

Quindi

- Se $k \neq -1$ la matrice A ha rango 3.
- Se $k = -1$ la matrice A ha rango 2.

b) Ponendo $k = 1$ al termine della riduzione e considerando il sistema omogeneo associato otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi il nucleo di A è l'insieme (spazio vettoriale):

$$N(A) = \{ \ (-1, 0, 1, -1) \cdot t \mid t \in \mathbb{R} \ \}$$

e una base del nucleo è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(N(A)) = \{ \ (-1, 0, 1, -1) \ \}$$

□

Esercizio 6.9 (7.50)**.** *Siano U e V i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle(2, -1, -2), \ (-3, 4, 3)\rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Soluzione:

U e V sono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Per dimostrare che $U = V$, dobbiamo dimostrare che $\dim(U) = \dim(V)$ e che $U \subseteq V$ oppure che $V \subseteq U$.

Cominciamo ad esplicitare U:

$$x + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow U = \{(-t, \ s, \ t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (-1, 0, 1), \ u_2 = (0, 1, 0)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente determiniamo una base di V stabilendo se i due generatori sono linearmente indipendenti. Senza la necessità di fare calcoli notiamo che i due generatori non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (2, -1, -2), \ v_2 = (-3, 4, 3)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\dim(U) = \dim(V) = 2$.

In questo caso è probabilmente più semplice verificare che $V \subseteq U$. Infatti abbiamo per U una doppia definizione:

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\} = \langle \ (-1, 0, 1), \ (0, 1, 0) \ \rangle$$

Utilzzando la prima definizione è immediato verificare che i due generatori v_1 e v_2 di V appartengono a U, infatti entrambi sono vettori di $\mathbb{R}^3$ che verificano la condizione $x + z = 0$. Otteniamo quindi:

$$v_1 \in U \quad \text{e} \quad v_2 \in U \ \Rightarrow \ V = \langle v_1, \ v_2\rangle \subseteq U.$$

Infine abbiamo dimostrato che V è un sottospazio di U della stessa dimensione di U, quindi U e V coincidono.

In alternativa per dimostrare che $U \subseteq V$ avremmo dovuto considerare la matrice formata da v_1, v_2, u_1, u_2 come colonne. Tale matrice ha rango 2, quindi u_1 e u_2 sono linearmente dipendenti da v_1 e v_2 e $U \subseteq V$.

□

Esercizio 6.10 (7.64)**.**

a) *Sia*

$$V = \langle \ (1, 2, 1), \ (-1, 3, 0), \ (3, 1, 2) \ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0, \ 2x + 3y + z = 0, \ x + 2z = 0 \ \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango della matrice A associata ai tre vettori riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/5II \\ III-5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 2$$
$$\mathcal{B}(V) = \{ \ (1,2,1), \ (-1,3,0) \ \}$$

b) Associamo al sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che i conti sono già stati eseguiti al punto precedente. Quindi

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$\dim(S) = 1$$
$$\mathcal{B}(S) = \{ \ (-2,1,1) \ \}$$

c) Notiamo che con la stessa matrice abbaimo risolto due esercizi differenti tra cui in genere è facile confondersi. La relazione tra i due esercizi, oltre alla medesima riduzione della matrice, è solo legata alle dimensioni:

$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(S) = \text{numero delle incognite} - \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(V) + \dim(S) = \text{numero delle incognite}$$

□

Esercizio 6.11 (7.70)**.** *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \ \}$$

a) *Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$.*
b) *Determinare una base di V.*

Soluzione:

Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad a_i \in \mathbb{R}$ il generico elemento di $\mathbb{R}_3[x]$. A $p(x)$ possiamo associare le sue componenti $(a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$ formata dai polinomi $\{1, \ x, \ x^2, \ x^3\}$. Quindi a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ possiamo associare il vettore $(a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3) \in \mathbb{R}^4$.

Nel nostro caso la condizione $p(1) = 0$ si traduce nella condizione $a_0+a_1+a_2+a_3 = 0$, quindi all'insieme di polinomi V corrisponde l'insieme:

$$W = \left\{(a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3) \in \mathbb{R}^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\}$$

cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo formato dalla sola equazione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

a) L'insieme W, e quindi l'insieme V, è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.

b) Per trovare una base di V determiniamo una base di W per poi tornare ai polinomi.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -r - s - t \\ a_1 = r \\ a_2 = s \\ a_3 = t \end{cases} \qquad \forall r, s, t \in \mathbb{R}$$

Quindi il generico elemento di W ha la forma

$$(-1, 1, 0, 0) \cdot r + (-1, 0, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 0, 1) \cdot t$$

e una base di W è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(W) = \{(-1, 1, 0, 0),\ (-1, 0, 1, 0),\ (-1, 0, 0, 1)\}$$

Associamo ora ai vettori determinati i corrispondenti polinomi:

$$\begin{aligned} (-1, 1, 0, 0) &\ \Rightarrow\ p_1(x) = -1 + x \\ (-1, 0, 1, 0) &\ \Rightarrow\ p_2(x) = -1 + x^2 \\ (-1, 0, 0, 1) &\ \Rightarrow\ p_3(x) = -1 + x^3 \end{aligned}$$

Infine l'insieme

$$\mathcal{B}(V) = \left\{p_1(x) = -1 + x,\ p_2(x) = -1 + x^2,\ p_3(x) = -1 + x^3\right\}$$

è una base di V.

□

Esercizio 6.12 (7.71)**.** *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbb{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio di $\mathbb{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned} p_1 &= (0, 1, 1) \\ p_2 &= (1, 2, 1) \\ p_3 &= (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbb{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio $f(x)$ associamo il vettore $f(1, -1, 2)$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 6.13 (7.74)**.** *Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.*

Soluzione:

Come negli esercizi precedenti associamo a $p(x)$ le sue componenti rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$, $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad p = (d, c, b, a)$$

Imponiamo le due condizioni al generico polinomio di grado al più 3:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \ \Rightarrow \ d = 0 \\ p(1) = 0 \ \Rightarrow \ a + b + c + d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Quindi a W corrisponde il sottospazio V formato dagli elementi di $\mathbb{R}^4$ soluzioni del sistema omogeneo:

$$V = \{(d, c, b, a) \in \mathbb{R}^4 \mid d = 0,\ a + b + c = 0\}$$

Scriviamo ora le soluzioni di tale sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a = -s - t \\ b = s \\ c = t \\ d = 0 \end{cases} \qquad \forall s, t, \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$V = \langle\ (0, 0, 1, -1),\ (0, 1, 0, -1)\rangle$$

Infine

$$W = \langle p_1(x) = x^2 - x^3,\ p_2(x) = x - x^3\ \rangle$$

□

Esercizio 6.14 (7.84)**.** *Sia S l'insieme delle matrici simmetriche:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$).

a) *Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.*
b) *Determinare una base di S.*

Soluzione:

a) Notiamo che la condizione percé una matrice 2×2 appartenga a S è che gli elementi di posto $1, 2$ e $2, 1$ siano uguali.

Verifichiamo le due proprietà richieste per uno spazio vettoriale.

– SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

due generici elementi di S. Allora

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in S$$

– PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix} \in S$$

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} =$$
$$= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di S. Infatti:

– Abbiamo appena visto che il generico elemento di S si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.
– Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, infatti:

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 6.15 (7.89)**.** *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA = 0\}$*. Dimostrare che* S *è un sottospazio di* $M_2(\mathbb{R})$ *e calcolarne la dimensione.*

Soluzione:

Sia

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbb{R})$. Cominciamo a calcolare gli elementi di S:

$$AM = \begin{bmatrix} x - z & y - w \\ -2x + 2z & -2y + 2w \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$
$$MA = \begin{bmatrix} x - 2y & -x + 2y \\ z - 2w & -z + 2w \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2w \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \\ w = t \end{cases}$$
$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Chiamiamo B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

S è quindi formato dai multilpli di B. E' perciò immediato dimostare che si tratta di un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}$:

- SOMMA. Se A_1 e A_2 appartengono a S, allora $A_1 = t_1 \cdot B$ e $A_2 = t_2 \cdot B$ per opportuni $t_1, t_2 \in S$, quindi

$$A_1 + A_2 = t_1 \cdot B + t_2 \cdot B = (t_1 + t_2) \cdot B \in S$$

- PRODOTTO per scalari. Sia $A = t \cdot B$ un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora
$$\lambda A = \lambda \cdot t \cdot B = (\lambda \cdot t) \cdot B \in S$$

In particolare S è uno spazio vettoriale di dimensione 1, generato dalla matrice B.

□

Esercizio 6.16 (7.90)**.** *Si consideri la matrice*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini una base del sottospazio* $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$.
b) *Mostrare che il sottoinsieme* $W = \{X \in U : X$ *è invertibile*$\}$ *non è un sottospazio vettoriale di* U.

Soluzione:
Sia
$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$
la generica matrice di $M_2(\mathbb{R})$.
$$AX = \begin{bmatrix} x+kz & y+kw \\ 2x+3z & 2y+3w \end{bmatrix} \qquad XA = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ z+2w & kz+3w \end{bmatrix}$$
Da $AX = XA$ otteniamo il sistema
$$\begin{cases} x+kz = x+2y \\ y+kw = kx+3y \\ 2x+3z = z+2w \\ 2y+3w = kz+3w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y+kz = 0 \\ kx+2y-kw = 0 \\ 2x+2z-2w = 0 \\ 2y-kz = 0 \end{cases}$$
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema:
$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2III \\ I \\ II \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ \\ III-kI \\ IV+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+z-w = 0 \\ -2y+kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -s+t \\ y = \frac{k}{2}s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}$$
Quindi
$$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

a) Abbiamo ottenuto che
$$\mathcal{B}(U) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
b) W non è un sottospazio in quanto, per esempio, non contiene l'elemento nullo. Infatti la matrice nulla
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
non è invertibile.

□

Esercizio 6.17 (7.91)**.** *Sia $W = \langle A,\ B\ , C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Cominciamo a stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolvento l'equazione matriciale $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} y + kz & ky + z \\ kx - 2y + (k-1)z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ ky + z = 0 \\ kx - 2y + (k-1)z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti:
$$\dim(W) = 3$$
$$\mathcal{B}(W) = \{A,\ B,\ C\}$$
- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t,\ y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti. In particolare A è la matrice nulla e $A = 0 \cdot B + 0 \cdot C$ dipende linearmente da B e C. Se studiamo invece la dipendenza di B e C risolvendo l'equazione $yB + zC = 0$ otteniamo la sola soluzione $y = z = 0$ quindi B e C sono linearmente indipendenti (Infatti B e C non sono una multiplo dell'altra). Di conseguenza
$$\dim(W) = 2$$
$$\mathcal{B}(W) = \{B,\ C\}$$

□

Esercizio 6.18 (7.92)**.** *Sia $V = \langle A, B, C\rangle$ il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*
b) *Si esprima $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare della base trovata al punto* a).

Soluzione:

a) Per determinare la dimensione di V cominciamo a verificare se A, B e C sono linearmente indipendenti risolvendo il sistema $xA + yB + zC = 0$:

$$x\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + 2y + 2z & y + 3z \\ x + 3y + 7z & 2x + 4y + 8z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ x + 3y + 7z = 0 \\ 2x + 4y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 3 & 7 & | & 0 \\ 2 & 4 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ III - 1/2I \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi il sistema $xA+yB+zC = 0$ ammette infinite soluzioni. Di conseguenza le tre matrici A, B, C sono linearmente dipendenti e $\dim(V) < 3$. Dai conti appena svolti si vede inoltre che risolvendo l'equazione $xA + yB = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

che ammette la sola soluzione $x = y = 0$, quindi le matrici A e B sono linearmente indipendenti. Infine $\dim(V) = 2$ e una base di V è data dall'insieme $\{A, B\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$. Procedendo come nel punto precedente otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ y = 2 \\ x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad D = -A + 2B$$

□