CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 5– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Esercizio 5.1. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali* $\text{null(A)} = \text{null(B)} = 0$.
b) *Sia $C = AB$. Stabilire se il sistema lineare $Cx = 0$ ha soluzione unica quando $k = 0$.*

Soluzione:

a) Ricordiamo che in una matrice A di dimensioni $m \times n$ si ha $\text{null(A)} = \text{n} - \text{rg(A)}$. Quindi in questo caso $\text{null(A)} = 3 - \text{rg(A)}$ e $\text{null(A)} = 0$ se e solo se $\text{rg}(A) = 3$; la stessa cosa vale per B. Determiniamo dunque per quali k la matrice A ha rango massimo, riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & -2k & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{null(A)} = 0$ se e solo se $k \neq 0$.

Riduciamo ora la matrice B

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II + I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & k+2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5III - (k+2)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & k+7 \end{bmatrix}$$

Si conclude che $\text{null(B)} = 0$ se e solo se $k \neq -7$.

Quindi $\text{null(A)} = \text{null(B)} = 0$ se e solo se $k \neq 0, -7$.

b) Per $k = 0$ la matrice $C = AB$ è

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 10 & 7 & -2 \\ -10 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ed essendo le ultime due righe una opposta dell'altra, tale matrice non ha rango massimo, per cui il sistema $Cx = 0$, non ha un'unica soluzione.

L'esercizio poteva essere risolto in maniera differente utilizzando i determinanti.

$\square$

Esercizio 5.2. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\text{Sol}(Ax = b)$.

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & | & 1 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k-4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro.

- Se $k \neq 1, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{3-k}{k+1} - 3 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{1-(k-2)}{k+1} = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{k+5}{k+1} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases}$$

- Se $k = 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{3}, 0\right) + (-3, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Se $k = 1$ si ha $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Per stabilire se v appartiene all'insieme $\text{Sol}(Ax = b)$ la cosa più semplice è sostituire le sue coordinate $(x, y, z, w) = \left(-\dfrac{7}{3}, -2, \dfrac{1}{3}, 1\right)$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -2 + 2 = 0 \\ (k+1) \cdot \dfrac{1}{3} + (k-2) \cdot 1 = 1 \\ (k-2) \cdot 1 = k-2 \end{cases} \Rightarrow \quad k = 2$$

Oppure si poteva sostituire nel sistema iniziale, ottenendo le condizioni:

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} - 2 + \dfrac{1}{3} + 5 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} + 2 + \dfrac{k+2}{3} + k - 1 = 2 \\ -\dfrac{7}{3} + \dfrac{k+2}{3} + 2k - 1 = k \end{cases} \Rightarrow \ k = 2$$

Quindi $v \in \text{Sol}(Ax = b)$ se $k = 2$.

□

Esercizio 5.3 (v. 7.62)**.** *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*

b) *Calcolare* null(A) *e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & -k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k-k^2 & -1-k \end{bmatrix}$$

a) Per quanto riguarda il rango di A otteniamo:

- Se $k \neq -1$ la matrice A ha rango 3.
- Se $k = -1$ la matrice A ha rango 2.

b) Per $k = 1$ null(A) $= 4 - 3 = 1$.
Ponendo $k = 1$ al termine della riduzione e considerando il sistema omogeneo associato otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi il nucleo di A è l'insieme (spazio vettoriale):

$$\text{Sol(A}|0) = \{\ (-1, 0, 1, -1) \cdot \text{t} \mid \text{t} \in \mathbb{R}\ \}$$

□

Esercizio 5.4 (6.4)**.** *Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A e procediamo affiancando ad A la matrice identica 2×2 prima di calcolare $rref(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -5 & | & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I - 2II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la matrice B e procediamo affiancando a B la matrice identica 3×3 prima di calcolare $rref(B)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{matrix} \\ 1/2II \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} I - 3III \\ II + 1/2III \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I + II \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che se $M \in M_{n \times n}$ è una matrice tale che $rref(M) = I_n$, allora $\text{rg}(M) = n$, quindi:
una matrice $n \times n$ è **invertibile** *se e solo se ha rango n.*

□

Esercizio 5.5 (6.7)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad \textit{(k reale).}$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Soluzione:

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} III \\ 1/2II \\ I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & k-1 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ k & k-1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I-II \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-kI \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{bmatrix}$$

– Se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A) = 3$,
– Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$,
– Se $k = 1$, $\text{rg}(A) = 1$.

a) A è invertibile, se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.
Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+4II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I-2II \\ \\ 1/2III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-III \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 5.6 (6.9)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-3kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

Quindi:
– Se $k \neq \pm 1$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
– Se $k = 1$ o $k = -1$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \pm 1$.

□

Esercizio 5.7 (v. 6.6)**.** *Dato $k \in \mathbb{R}$, si considerino le seguenti matrici reali*

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A_1, per $k = 1$.*
c) *Risolvere l'equazione matriciale $A_1X + B = 0$, con X matrice reale 3×3.*

Soluzione:

a) Riduciamo A_k a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II - kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2-k\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2-k\\ 0 & 0 & -3+2k\end{bmatrix}$$

Quindi:
- Se $k \neq \frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = 3$ e A_k è invertibile.
- Se $k = \frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = 2$ e $A_k = A_{\frac{3}{2}}$ non è invertibile.

b) Fissato $k = 1$, calcoliamo l'inversa di A_1 calcolando $rref(A_1)$ dopo avere affiancato a A_1 la matrice identica:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I+III \\ II+III \\ -III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A_1^{-1} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix} \quad (\text{con } k = 1)$$

c) Per risolvere l'equazione matriciale $A_1X + B = 0$, basta osservare che, essendo A_1 invertibile, possiamo ottenere la relazione:

$$A_1X + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1X = -B \quad \Rightarrow \quad A_1^{-1}A_1X = -A_1^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = -A_1^{-1}B$$

Avendo già calcolato l'inversa A_1^{-1}, si tratta semplicemente di effettuare il prodotto

$$X = -\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

□

Esercizio 5.8 (6.11)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & k-4\\ 2 & k & 0\end{bmatrix} \quad (k \textit{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array}\begin{bmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & k-4\\ 0 & -k & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+kII \end{array}\begin{bmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & k-4\\ 0 & 0 & k(k-4)\end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & k & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & k & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & k & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -k & 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I+III \\ \\ III+kII \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k(k-4) & -2 & k & 1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - \frac{1}{k}III \\ \frac{1}{k(k-4)}III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)}\end{array}\right]$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \qquad \forall k \neq 0, 4$$

□

Esercizio 5.9. *Sia A una matrice reale invertibile che soddisfa l'equazione $2A^2 - A - I = 0$. Esprimere l'inversa A^{-1} di A in funzione di A.*

Soluzione:

Essendo A invertibile, otteniamo le seguenti relazioni:

$$2A^2 - A - I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot \left(2A^2 - A - I\right) = A^{-1} \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 2A - I - A^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = 2A - I$$

□

Esercizio 5.10 (v. 7.93)**.** *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca per quali valori di k la matrice D è combinazione lineare di A, B e C. In tali casi si esprima D come combimazione lineare di A, B e C.

Soluzione:

Si tratta di risolvere l'equazione $xA + yB + zC = D$. Tale equazione si traduce nel seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + 2z = 6 \\ x + 4y + 9z = k - 2 \\ 2x + 4y + 10z = 2 \\ x + z = k + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 6 \\ 1 & 4 & 9 & | & k-2 \\ 2 & 4 & 10 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & k+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - I \\ IV - 1/2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 4 & 8 & | & k-5 \\ 0 & 4 & 8 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ 1/4III \\ II - III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzioni solo se $k = 1$, quindi D è combinazione lineare di A, B e C solo se $k = 1$ quando otteniamo:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 - 2t \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad D = (3 - t)A + (-1 - 2t)B + C \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \text{se } k = 1.$$

□

Esercizio 5.11 (5.16)**.** *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere B come combinazione lineare di A e C.*

Soluzione:

a) Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente dipendenti risolviamo l'equazione $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} x + 2y & x + (k+1)y + z \\ 2x + 4y + (2k-2)z & -x + (k-3)y + (2k-1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x+(k+1)y+z=0 \\ 2x+4y+(2k-2)z=0 \\ -x+(k-3)y+(2k-1)z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2k-2 & | & 0 \\ -1 & k-3 & 2k-1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti se il sistema ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{array}{l} \\ II-I \\ III-2I \\ IV+I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 2k-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

– Se $k \neq 1$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow -2t\cdot A + t\cdot B + 0\cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Il sistema ha infinite soluzioni e quindi le tre matrici sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$ abbiamo ottenuto al punto precedente $-2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-2A + B = 0$, ovvero $B = 2A$.

□

Esercizio 5.12 (5.17)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

SOLUZIONE:

Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 1 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III+I \\ IV-3I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 6 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ III+II \\ 3IV-5II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ \\ 4IV-3III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema notiamo che l'ultima equazione è $0 = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

$\square$

Esercizio 5.13 (7.22)**.** *Siano dati i segunti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0, k^2+2, 3), \qquad v_4 \equiv (1, k+3, k^2+2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *al variare del parametro* k*.*

Soluzione:

Si tratta di stabilire se l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione.

Il vettore $xv_1 + yv_2 + zv_3$ è $\left(x+2y,\ x+7y+(k^2+2)z,\ x+7y+3z\right)$, quindi la precedente equazione si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ x+7y+(k^2+2)z = k+3 \\ x+7y+3z = k^2+2 \end{cases}$$

Infine possiamo considerare la matrice associata a tale sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 7 & k^2+2 & | & k+3 \\ 1 & 7 & 3 & | & k^2+2 \end{bmatrix}$$

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$. Notiamo che potevamo passare direttamente dai vettori alla matrice $A|b$:

Un vettore v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$ se e solo se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$, dove A è la matrice che ha per colonne i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ e b è la matrice colonna formata da v_4.

Riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & k^2+2 & | & k+2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & k^2-k-1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il pivot della terza riga e distinguiamo i casi necessari.

- Se $k \neq \pm 1$ sia la matrice completa che quella incompleta hanno 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (una unica) soluzione. Di conseguenza v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = 1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = -1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

$\square$

Esercizio 5.14 (7.25)**.**

a) *Mostrare che i vettori*
$$v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (-1,k,0), \quad v_3 = (1,1,k)$$
sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$*.*

b) *Esprimere il vettore* $v = (2,1,2)$ *come combinazione lineare di* v_1, v_2, v_3*.*

Soluzione:
Per rispondere alla domanda a) dobbiamo verificare che l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ ammette **solo** la soluzione nulla, ovvero che la matrice A associata ai tre vettori ha sempre rango 3.

Per rispondere alla domanda b) dobbiamo verificare che l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ ammette soluzione (e non ha importanza se ne ammette una oppure infinite), ovvero che $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$, dove $A|b$ è la matrice associata all'equazione.

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo quindi direttamente a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & k & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & k & 1-k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1+2k \end{bmatrix}$$

a) Per rispondere alla prima domanda ci interessa solo la matrice A dei cofficienti. La matrice dei coefficienti ha sempre rango 3, quindi l'equazionine $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ ammette la sola soluzione nulla e v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti per ogni valore di k.
b) Risolviamo il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + kz = 2 \\ -y + z = 2 \\ z = 2k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2k^2 + k + 2 \\ y = 2k - 3 \\ z = 2k - 1 \end{cases}$$

Quindi

$$v = (-2k^2 + k + 2)v_1 + (2k - 3)v_2 + (2k - 1)v_3$$

è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

□

Esercizio 5.15 (5.19)**.** *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:
Si tratta di stabilire se l'equazione

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = f(x)$$

ammette soluzioni. Esplicitando l'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) &= a(1 + x) + b(1 + 2x + x^2) + c(x - x^2) \\ &= (b - c)x^2 + (a + 2b + c)x + (a + b) \end{aligned}$$

Quindi

$$(b - c)x^2 + (a + 2b + c)x + (a + b) = x^2 - x + 2 \Rightarrow \begin{cases} b - c = 1 \\ a + 2b + c = -1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

L'esercizio poteva essere svolto in maniera leggermente semplificata osservando che a ogni polinomio possiamo associare il vettore formato dai suoi coefficienti dopo avere scelto un ordine per l'insieme $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. La giustificazione precisa di questo fatto verrà data dopo avere introdotto il concetto di base, ma possiamo intanto osservare che ogni vettore è univocamente determinato dai suoi coefficienti e che la somma e il prodotto per scalari sono definiti in maniera analoga tra vettori e tra polinomi. Di conseguenza ai polinomi $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$ possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned} p_1 &= (0, 1, 1) \\ p_2 &= (1, 2, 1) \\ p_3 &= (-1, 1, 0) \\ f &= (1, -1, 2) \end{aligned}$$

Il polinomio $f(x)$ è combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ se il vettore f è combinazione lineare dei vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$. Risolvendo l'equazione $ap_1 + bp_2 + cp_3$ otteniamo il sistema a cui è associata la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

che è infatti la stessa che abbiamo ottenuto con il precedente metodo.

$\square$