CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Esercizio 4.1 (Esercizio 4.1)**.** *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Soluzione:

Anzichè procedere per sostituzione utilizziamo un metodo alternativo: il metodo di riduzione.

Usiamo il metodo di riduzione. Al sistema lineare associamo la matrice formata dai coefficienti delle incognite e dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo la riduzione:

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III + I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/3III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ -z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Il metodo appena introdotto è detto **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & | & \star \\ 0 & \star & \star & | & \star \\ 0 & 0 & \star & | & \star \end{pmatrix}$$

Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.

Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:

- Scambio di due righe della matrice.

$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} III \\ II \\ I \end{pmatrix}$$

- Sostituzione di una riga con un suo multiplo non nullo.

$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ aII \\ III \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0$$

- Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.

$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ II + I \\ III \end{pmatrix}$$

- Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione linare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni che vedremo esplicitamente negli esercizi.

$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ aII + bI \\ III \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0$$

Notiamo che per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione abbiamo utilizzato per modificare una riga solo le combinazioni lineari con le righe che la precedono.

Seguiremo in generale questo principio, quindi, a parte gli scambi di righe,

- La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
- La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
- La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.

$\square$

Esercizio 4.2 (Esercizio 4.2)**.** *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Torniamo ora al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ y + 4z + 2w = 0 \\ -2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15t \\ y = -8t \\ z = \dfrac{3}{2}t \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto infinite soluzioni. Infatti il numero di incognite è maggiore del numero delle equazioni.

Esercizio 4.3 (Esercizio 4.3)**.** *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z &= 4 \\ x + y + kz &= k \\ x + 2y + 3z &= 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{pmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo la matrice a gradini.

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo la prima e la terza riga. Lo scopo di questa operazione è *spostare i parametri verso il basso.*

Se così non facessimo nella riduzione a gradini dovremmo necessariamente procedere nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} \\ kII - I \\ III - II \end{array} \begin{pmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \\ 0 & 1 & 3-k & | & k \end{pmatrix}$$

Il sistema così ottenuto non è però equivalente a quello iniziale nel caso $k = 0$. Infatti per $k = 0$ abbiamo sostituito la seconda riga con la prima riga cambiata di segno, operazione non lecita. Nelle regole date inizialmente sulla sostituzione di una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga:

$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ aII + bI \\ III \end{pmatrix}$$

era infatti richiesta la condizione $a \neq 0$ (notiamo invece che non c'è nessuna richiesta sul valore di b). Procedendo in questo modo dovremmo poi considerare il caso $k = 0$ separatamente, riprendendo la matrice precedente all'operazione non lecita.

Effettuiamo invece con lo scambio delle righe:

$$\begin{array}{r} III \\ \\ I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che in questo caso l'operazione è lecita anche per $k = 0$ (quando in pratica lasciamo la terza riga invariata).

a) L'ultima equazione del sistema è $0 = 4 - k^2$ che non risulta impossibile solo se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$. In tali casi il sistema ammette soluzione.
   Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Consideriamo separatamente i casi $k = \pm 2$.
   - Per $k = 2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t + 2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

   - Per $k = -2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ -y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = -5t - 2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.4 (Esercizio 4.4)**.** *Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & k+2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k^2-k+2 & | & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \\ IV-II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{pmatrix}$$

In conclusione abbiamo ottenuto il sistema equivalente

$$\begin{cases} x+2w=1 \\ y+3z=0 \\ (k-1)z=0 \\ k(k-1)w=k-1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere il parametro.

- Se $k(k-1)\neq 0$, cioè se $k\neq 0,\ k\neq 1$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare il valore della w. Analogamente se $k\neq 1$ dalla terza equazione possiamo ricavare il valore della z. Quindi per $k\neq 0,\ k\neq 1$ otteniamo le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x=\frac{k-2}{k} \\ y=0 \\ z=0 \\ w=\frac{1}{k} \end{cases}$$

  Di conseguenza se $k\neq 0,\ k\neq 1$ il sistema ammette una unica soluzione:

$$(x,y,z,w)=\left(\frac{k-2}{k},0,0,\frac{1}{k}\right).$$

- Se invece $k=0$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x+2w=1 \\ y+3z=0 \\ -z=0 \\ 0=-1 \end{cases}$$

  Poiché l'ultima equazione è impossibile, per $k=0$ il sistema non ha soluzioni.

- Infine se $k=1$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x+2w=1 \\ y+3z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

  In questo caso abbiamo due sole equazioni (significative) e 4 incognite. Dobbiamo quindi introdurre 2 parametri:

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3s \\ z=s \\ w=t \end{cases} \qquad \forall s,t\in\mathbb{R}$$

  Di conseguenza se $k=1$ le soluzioni del sistema sono date dall'insieme

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z,w)=(-2t+1,-3s,s,t)\ \mid s,t\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(-2,0,0,1)\cdot t+(0,-3,1,0)\cdot s+(1,0,0,0)\ \mid s,t\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

  In questo caso otteniamo perciò infinite soluzioni (e neanche in questo caso S è uno spazio vettoriale! Infatti non sono soluzioni di un sistema omogeneo)

□

Esercizio 4.5 (Esercizio 4.6)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

Sia $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{pmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow II + I \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare x_3 ottenendo quindi una unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t + 14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t + 8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, invece l'ultima equazione diventa

$$0 = 5$$

  Quindi l'equazione è impossibile e il sistema non è compatibile.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.6 (Esercizio 4.7)**.** *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

ammette un'unica soluzione. In tale caso trovare la soluzione.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + (k-1)II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - (k-1)z = 1 \\ -k(k-2)z = -k \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere i valori del parametro distinguendo tre casi:

- Se $k \neq 0, 2$ otteniamo

$$\begin{cases} x = -\frac{k-1}{k-2} \\ y = \frac{2k-3}{k-2} \\ z = \frac{1}{k-2} \end{cases}$$

  quindi il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $k = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

  Il sistema ammette soluzione, ma in questo caso ne ammette infinite in quanto abbiamo ottenuto un sistema in tre equazioni e due sole incognite. Anche se non era richiesto possiamo comunque ricavare le soluzioni

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  quindi il sistema ammette infinite soluzioni.
- Se $k = 2$ otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

  quindi il sistema non ammette soluzioni.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.7 (Esercizio 4.8)**.** *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -k & k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & -2 & | & -k \\ 0 & -k+1 & k+1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ -II \\ III + (-k+1)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 3k-1 & | & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = k \\ y + 2z = k \\ (3k-1)z = k^2 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k = \frac{1}{3}$ allora l'ultima riga diventa $0 = \frac{1}{9}$, quindi è impossibile e il sistema non ammette soluzione.
- Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite che ammette una unica soluzione:

$$\begin{cases} 2x_- x_2 = k \\ x_2 + 2x_3 = k \\ (3k-1)x_3 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2k^2-k}{3k-1} \\ x_2 = \frac{k^2-k}{3k-1} \\ x_3 = \frac{k^2}{3k-1} \end{cases}$$

□

Esercizio 4.8 (Esercizio 7.1)**.** *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A_1. Visto che A_1 è ridotta a gradini è immediato calcolarne il rango utilizzando i pivot:
  - Se $t+1$ e $t-3$ sono non nulli, ovvero se $t \neq -1, 3$, allora A_1 ha tre pivot e $\text{rg}(A_1) = 3$.
  - Se $t = -1$ la matrice diventa:
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  Quindi se $t = -1$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.
  - Se $t = 3$ la matrice diventa:
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  Quindi se $t = 3$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.

  Analogamente potevamo calcolare il rango di A_1 ragionando sui determinanti.
  $$\det(A_1) = (t+1)(t-3)$$
  Quindi:
  - Se $t \neq -1, 3$, la matrice ha determinante non nullo, quindi A_1 ha rango 3.
  - Se $t = -1$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1) \leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice
  $$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
  con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_1) = 2$
  - Se $t = 3$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1) \leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
  con determinante non nullo. Quindi anche in questo caso $\text{rg}(A_1) = 2$.
- Anche se la matrice A_2 non è completamente ridotta a gradini possiamo comunque calcolarne il rango ragionando sui pivot.

– Se $t \neq -1$ la matrice A_2 ha tre pivot e quindi $\text{rg}(A_2) = 3$. Notiamo che anche nei casi particolari $t = 3$ e $t = 0$ otteniamo una matrice con tre pivot, infatti:
  * Se $t = 3$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
  * Se $t = 0$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.

– Se $t = -1$ otteniamo la matrice

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 4II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $t = -1$ la matrice A_2 ha due pivot e $\text{rg}(A_2) = 2$.

Calcoliamo ora il rango di A_2 ragionando sui determinanti. Consideriamo la sottomatrice quadrata 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix}$$

il cui determinante vale

$$\det(B) = (t+1)(t-3)$$

Quindi:

– Se $t \neq -1, 3$, la matrice B ha determinante non nullo, quindi A_2 ha rango 3.

– Se $t = -1$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza per $t = -1$ ogni sottomatrice 3×3 di A_2 ha determinante nullo, mentre

$$\det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

Di conseguenza $\text{rg}(A_2) = 2$

– Se $t = 3$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In A_2 troviamo quindi la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_2) = 3$.

• Riduciamo a gradini della matrice A_3:

$$\begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III - tI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & -4 & 1-t \\ 0 & 0 & -2t & -t^2 \end{bmatrix}$$

Se ragioniamo sui pivot otteniamo:
– Se $t \neq 0$ la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A_3) = 3$.
– Se $t = 0$ la matrice A_3 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi ha 2 pivot e $\text{rg}(A_3) = 2$.

Ragionando invece sui determinanti notiamo che A_3 contiene la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ t & 0 & t \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $-2t$.

Di conseguenza
– Se $t \neq 0$ la matrice A_3 ha rango 3.
– Se $t = 0$ otteniamo la matrice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha una riga nulla, quindi tutte le sottomatrici 3×3 di A_3 hanno determinante nullo e $\text{rg}(A_3) \leq 2$. Inoltre in A_3 troviamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi in questo caso $\text{rg}(A_3) = 2$.

□

Esercizio 4.9 (Esercizio 7.3)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Sia $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & 5 \end{array}\right]$$

Per stabilire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Notiamo che il numero delle incognite del sistema corrisponde al numero delle colonne di A.

Riduciamo quindi $A|b$ a gradini per calcolarne il rango:

$$\begin{array}{c} \\ II+I \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t+14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t+8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzioni.

□

Esercizio 4.10 (Esercizio 7.4)**.** *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$. Scambiamo la prima e quarta colonna di A e ricordando poi tale scambio prima di rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6k & | & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4k+1 & | & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II-1/2I \\ III+1/2I \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Anche senza completare la riduzione siamo in grado di risponedere ad entrambe le domande.

a) La matrice A ha rango 3 per ogni valore di k, infatti i due termini $k-1$ e $k+2$ non si possono annullare contemporaneamente.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione se anche $rg(A|b) = 3$, cioè se $k = 1$ quando, ricordando lo scambio di colonne, otteniamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w + 2y - z + 3x = \\ 2y + 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = t \\ w = -\frac{4}{3} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Infine le soluzioni del sistema sono gli elementi dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{4}{3} \right) + (0, 0, 1, 1)t \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□