CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 2– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012 /13

Esercizio 2.1 (2.5)**.**

a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:*

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

Soluzione:

a) Osserviamo subito che r e r' non sono parallele in quanto r è parallela al vettore $(2, 1, 1)$ mentre r' è parallela al vettore $(1, 0, 1)$.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r \cap r'$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite t, s:

$$\begin{cases} 2t = s \\ t + 1 = 2 \\ t + 3 = s + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \\ 1 + 3 = 2 + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di r (o analogamente di r') il valore di t (o di s) determinato, troviamo che r e r' sono incidenti nel punto $P(2, 2, 4)$.

b) L'angolo ϑ formato dalle rette r e r' corrisponde all'angolo formato dai rispettivi vettori direzione $u = (2, 1, 1)$ e $v = (1, 0, 1)$. Possiamo quindi sfruttare la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|}$$

dove

$$|u| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$
$$|v| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Quindi

$$\cos(\vartheta) = \frac{2 + 1}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 30°.$$

□

Esercizio 2.2 (2.21)**.** *Nel piano, si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \qquad r_2 \ : \ x - 2y + 1 = 0, \qquad r_3 \ : \ 2x + y - 2 = 0.$$

a) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta r parallela a r_1 e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.*

b) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta s perpendicolare a r_1 e passante per A.*

c) *Si calcoli l'angolo tra le rette r_1 e r_2 e tra le rette r_2 e r_3.*

Soluzione:

a) Determiniamo $A = r_2 \cap r_3$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

La retta r è quindi la retta per A di direzione parallela al vettore $(-2, 2)$:

$$r : \begin{cases} x = \frac{3}{5} - 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y - \frac{7}{5} = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione cartesiana di r_1:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -x + 1$$

Di conseguenza l'equazione cartesiana di r è:

$$y - \frac{4}{5} = -\left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow x + y - \frac{7}{5} = 0$$

b) Utilizzando l'equazione parametrica di s, una direzione perpendicolare a quella di r_1 è data dal vettore $(2, 2)$, quindi:

$$s: \begin{cases} x = \frac{3}{5} + 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \Rightarrow x - y + \frac{1}{5} = 0$$

Utilizzando in alternativa l'equazione cartesiana di r_1, la retta s ha coefficiente angolare opposto del reciproco del coefficiente angolare di r_1, quindi 1:

$$s: \ y - \frac{4}{5} = \left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow x - y + \frac{1}{5} = 0$$

c) Ricaviamo le equazioni parametriche delle tre rette per avere dei vettori direzione. Sappiamo già che r_1 è parallela a $v_1 = (-2, 2)$, inoltre

$$r_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi r_2 è parallela a $v_2(2, 1)$ e r_3 è parallela a $v_3(1, -2)$. Infine

$$\cos(v_1 v_2) = \frac{-4+2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Notiamo che i vettori v_2 e v_3 sono ortogonali, quindi l'angolo tra r_2 e r_3 è $\frac{\pi}{2}$.

$\square$

Esercizio 2.3 (2.27)**.** *Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano π e la retta s di equazioni*

$$\pi: \ x + z = 4, \qquad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto B, proiezione ortogonale di A su π e la retta r passante per A e per B.*
b) *Indicato con C il punto di intersezione tra s e r e con D il punto di intersezione tra s e π, si determini un'equazione della retta CD.*
c) *Si determini l'angolo tra r e la retta CD.*

Soluzione:

a) Per trovare B determiniamo l'equazione della retta r passante per A e ortogonale a π, cioè di direzione $(1, 0, 1)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Il punto B è dato dall'intersezione tra r e π:

$$B: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ 1 + s + 1 + s = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (2, 2, 2)$$

Notiamo che la retta passante per A e B richiesta è la retta r precedentemente trovata.

b) Calcoliamo le intersezioni:

$$C = r \cap s : \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ 1+s = 1+t \\ 2 = 2 \\ 1+s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = -1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (0,2,0)$$

$$D = s \cap \pi : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ x+z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ 1+t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (4,2,0)$$

Il vettore CD è $(4,0,0)$, quindi un'equazione della retta CD è:

$$r_{CD} : \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

c) La retta r è parallela al vettore $u = (1,0,1)$ e la retta CD è parallela al vettore $v = (4,0,0)$. Indicato con ϑ l'angolo tra le due rette si ottiene:

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

□

Esercizio 2.4 (12.16)**.** *Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0,0)$, $A_2(4,2)$ e $A_3(1,k)$ ha area 5.*

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3 è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1,k), \qquad \overrightarrow{A_2A_1} = (4,2)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in $\mathbb{R}^2$ otteniamo quindi

$$Area(\text{triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & k \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(2-4k)\right| = |1-2k|$$

Imponendo la condizione che l'area del triangolo sia 5 otteniamo $1-2k = \pm 5$, quindi $k = -2$ o $k = 3$.

Abbiamo quindi ottenuto due possibili soluzioni:

- $k = -2$ ovvero $A_3 = (1,-2)$.
- $k = 3$ ovvero $A_3 = (1,3)$.

□

Esercizio 2.5 (v. 12.23)**.** *Siano $A = (0,-1,0)$, $B = (-2,0,-3)$, $C = (-1,0,-1)$ punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.*
b) *Stabilire se il punto $D = (2,2,2)$ appartiene al piano contenente A, B, C.*

Soluzione:

a) L'area del parallelogramma di lati AB e AC è data dalla lunghezza del vettore $AB \times AC$. Poiché $AB = (-2,1,-3)$ e $AC = (-1,1,-1)$, otteniamo

$$AB \times AC = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2i + j - k = (2,1,-1) \quad \Rightarrow \quad |AB \times AC| = \sqrt{6}.$$

Infine l'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma:

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Un modo consiste nel determinare il piano passante per i tre punti A, B, C il quale ha equazione

$$\pi : \begin{cases} x = -2t - s \\ y = -1 + t + s \\ z = -3t - s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x + y - z = -1$$

Il punto D non soddisfa l'equazione di π: $4 + 2 - 2 \neq -1$, quindi D non appartiene al piano contenente A, B, C.

□

Esercizio 2.6 (12.19)**.** *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati* $u(1, 0, 0)$, $v(-3, 1, 1)$ *e* $w(-2, 2, 5)$.

Soluzione:

Il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto misto dei vettori che formano i lati del parallelepipedo. Cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale di v e w:

$$v \times w = (3,\ 13,\ -4)$$

Quindi

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u, (v \times w))| = |u \cdot v \times w| = |((1, 0, 0),\ (3,\ 13,\ -4))| = |3| = 3$$

Analogamente

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right| = |1 \cdot (5 - 2)| = 3$$

□

Esercizio 2.7 (12.20)**.** *Siano* $P_1 = (1, -1, 0), P_2 = (1, 0, -1), P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *e* $P_4 = (1, 2, 1)$ *quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.

b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo cercato, usiamo la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_2P_3}|}$$

Poichè

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, -1),$$

si ha

$$(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Quindi $\cos(\vartheta) = 0$ e $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Il volume del prisma é metà del volume del parallelepipedo di lati $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_4}$. Poichè

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (0, 3, 1)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} V &= \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \left(\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left|\left((0, 1, -1), \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Analogamente

$$V = \left| \left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{8}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

□

Esercizio 2.8 (12.22)**.** *Si considerino i piani $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$ di equazioni:*

$$\pi_1 :\ 2x - y = 1, \qquad \pi_2 :\ x + y + z = 0, \qquad \pi_3 :\ x - 2z = 1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C, con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema i tre piani:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ x + 2x - 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \\ z = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = A = \left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7} \right).$$

b) Calcoliamo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

La retta ha direzione $(1, 2, -3)$, quindi un piano ortogonale a r ha equazione del tipo $x + 2y - 3z = d$. Imponendo il pasaggio per l'origine otteniamo $d = 0$. Infine il piano cercato è

$$\pi_4 :\ x + 2y - 3z = 0$$

c) Abbiamo già trovato A nel punto a). Analogamente mettendo a sistema gli altri piani otteniamo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = B = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7} \right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = C = \left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7} \right).$$

Di conseguenza

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7} \right), \qquad \overrightarrow{BC} = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right). \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = (-1, 0, -2)$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} |\, (-1,\ 0,\ 2)\, | = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

□

Esercizio 2.9 (1.2)**.** *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici* A, B *e scalari* λ, $\mu \in \mathbb{R}$, *calcolare* $A+B$, $B-A$, $\lambda A+\mu B$, AB, BA, A^2*:*

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3&2\\-1&4\end{bmatrix}\qquad \lambda=\frac{1}{2},\ \mu=0$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\3&-1&-1\\2&0&-1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3&0&2\\-1&4&5\\-1&0&0\end{bmatrix}\qquad \lambda=2,\ \mu=-1$$

SOLUZIONE:
Comiciamo dalla prima coppia di matrici:

$$A+B=\begin{bmatrix}4&3\\1&6\end{bmatrix}\qquad B-A=\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B=\frac{1}{2}\cdot A+0\cdot B=\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&1\end{bmatrix}\qquad AB=\begin{bmatrix}2&6\\4&12\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7&7\\7&7\end{bmatrix}\qquad A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&3\\6&6\end{bmatrix}$$

Analogamente per la seconda coppia di matrici:

$$A+B=\begin{bmatrix}4&0&3\\2&3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}\qquad B-A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-4&5&6\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B=2A-B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\7&-6&-7\\5&0&-2\end{bmatrix}\qquad AB=\begin{bmatrix}2&0&2\\11&-4&1\\7&0&4\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7&0&1\\21&-4&-10\\-1&0&-1\end{bmatrix}\qquad A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&0&0\\-2&1&5\\0&0&3\end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.10 (1.3)**.** *Date le seguenti matrici:*

$$A_1=\begin{bmatrix}-1&2&5&-3\\3&-1&0&2\\4&0&0&-2\end{bmatrix};\qquad A_2=\begin{bmatrix}0&-2&5\\4&-3&2\end{bmatrix};\qquad A_3=\begin{bmatrix}5&0\\-1&2\\4&5\\5&-1\end{bmatrix};$$

$$A_4=\begin{bmatrix}3&5\\-1&10\\-2&0\end{bmatrix};\qquad A_5=\begin{bmatrix}-2&4&1\\-4&4&4\\0&0&0\end{bmatrix};\qquad A_6=\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-8&5&3\end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i\cdot A_j$ *per* $i,j=1,2,3,4,5,6$.

SOLUZIONE:
Ricordiamo che una matrice è detta $n\times m$ se ha n righe e m colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici A e B solamente se

- A è del tipo $n\times m$
- B è del tipo $m\times k$

(cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B). Il risultato è una matrice C del tipo $n\times k$.

Scriviamo solo i prodotti che è possibile effettuare:

$$A_1 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 32 \\ 26 & -4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 0 & -14 \\ -5 & 11 & 20 & -22 \end{bmatrix} \qquad A_2 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -8 & -20 \\ 11 & -10 \end{bmatrix} \qquad A_2 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 8 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 25 \\ 8 & -4 & -1 \\ 20 & -23 & 30 \\ -4 & -7 & 23 \end{bmatrix} \qquad A_3 \cdot A_6 = \begin{bmatrix} -15 & 5 & -5 \\ -13 & 9 & 7 \\ -52 & 29 & 11 \\ -7 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_4 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 20 & -21 & 25 \\ 40 & -28 & 15 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix} \qquad A_4 \cdot A_6 = \begin{bmatrix} -49 & 28 & 12 \\ -77 & 49 & 31 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_5 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 18 & -8 & -10 & 12 \\ 32 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -12 & 30 \\ -24 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 14 \\ -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_6 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -15 & 13 \\ 35 & -21 & -40 & 28 \end{bmatrix} \qquad A_6 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -35 & 10 \end{bmatrix} \qquad A_6 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.11 (1.4)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 *e* I_4A^T.

Soluzione:

Notiamo che la matrice quadrata I_4 è detta *matrice identica* di ordine 4. In generale le matrici identiche (dei differenti ordini) vengono indicate I.

$$AI_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$I_4A^T = I_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = A^T$$

□

Esercizio 2.12 (1.5)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ *e* AB^T.

Soluzione:

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} -6 & \frac{3}{2} & 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 & \frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{15}{2} & \frac{23}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è detta matrice scalare.

□

Esercizio 2.13 (1.6)**.** *Calcolare la potenza* A^3 *della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Si tratta di eseguire due prodotti:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 5 \\ 5 & 26 & 15 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$\square$