

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

APPLICAZIONI LINEARI – GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Una **Applicazione lineare** $T : V \rightarrow W$ è una funzione tra due spazi vettoriali che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \\T(\lambda v) &= \lambda T(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

In particolare se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V e $v \in V$, allora:

$$T(v) = T(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + \dots + x_n T(v_n)$$

A ogni applicazione lineare può essere associata una **matrice** $A = M(T)$ che ha per colonne le immagini degli elementi di una base di V , espresse rispetto a una base di W . Salvo indicazioni le basi di V e W sono le basi canoniche. Usando la matrice associata

$$T(v) = A \cdot v \quad \forall v \in V$$

Un'applicazione lineare può essere definita tramite:

- La regola, cioè l'immagine del generico elemento:
 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$

- Le immagini di una base:
 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{aligned}T(e_1) &= (1, 2, 1) \\T(e_2) &= (1, 0, -1)\end{aligned}$$

- La matrice associata rispetto a una base:
 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se non è specificato, la matrice si intende sempre associata rispetto alle basi canoniche.

Le tre precedenti definizioni definiscono la stessa applicazione lineare.

L'**Immagine** $\text{Im}(T)$ di una applicazione lineare $T : V \rightarrow W$ è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V :

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle \subseteq W$$

Utilizzando la matrice $A = M(T)$ associata:

- $\text{Im}(T) =$ spazio generato dalle colonne di A (Prestare attenzione se le basi di V e W non sono quelle canoniche)
- $\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{ \text{colonne linearmente indipendenti di } A \}$ (Prestare attenzione se le basi di V e W non sono quelle canoniche).
- $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A)$

Il **Nucleo** $\ker(T)$ di una applicazione lineare $T : V \rightarrow W$ è il sottospazio di V formato dagli elementi la cui immagine è lo 0:

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V$$

Utilizzando la matrice A associata:

- $\ker(T) = \{ \text{soluzioni del sistema omogeneo associato a } A \}$ (Prestare attenzione se le basi di U e di V non sono quelle canoniche).
 - $\dim(\ker(T)) = n - \text{rg}(A)$, dove $n = \dim(V) = \text{numero delle incognite del sistema lineare}$.
-

- Il teorema di **Nullità più rango** afferma che se $T : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare, allora

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = n = \dim(V)$$

- Una applicazione è detta **Iniettiva** se $\dim(\ker(T)) = 0$, cioè se $\ker(T) = \{0\}$.
 - Una applicazione è detta **Suriettiva** se $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$, cioè se $\text{Im}(T) = W$.
 - Una applicazione è detta **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Un'applicazione è invertibile sse è biiettiva.
-

Bisogna prestare particolare attenzione quando l'applicazione non è definita sulle basi canoniche.