PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE* – D – 28/4/2013

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. INF. ORG.

Esercizio 0.1. *Si considerino le seguenti rette:*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 5t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad r_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases}$$

a) *Dimostrare che r_1 e r_2 sono complanari e trovare un'equazione cartesiana del piano π che le contiene.*
b) *Determinare un'equazione parametrica della retta passante per il punti $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare al piano π trovato al punto precedente.*
c) *Calcolare la distanza di P da π.*

SOLUZIONE:
Scriviamo r_2 in forma parametrica:

$$r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -t + \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

a) La retta r_1 ha direzione $(1, 5, -3)$ e la retta r_2 ha direzione $(1, 1, -1)$, quindi le rette non sono parallele e sono complanari solo se si intersecano in un punto. Mettendo a sistema r_1 in forma parametrica con r_2 in forma cartesiana otteniamo:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 5t \\ z = -1 - 3t \\ x - y = 1 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t - 3 - 5t = 1 \\ 2 + 2t - 2 - 6t = 3 \\ x = 1 + t \\ y = 3 + 5t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \\ z = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Le rette r_1 e r_2 sono incidenti nel punto $A\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$, quindi sono complanari.

Il piano π che le contiene lo possiamo ottenere mediante le direzioni delle due rette ed un qualsiasi punto di una delle due rette:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 3 + 5t + s \\ z = -1 - 3t - s \end{cases} \Rightarrow \qquad x + y + 2z = 2$$

b) Ogni retta perpendicolare a π ha direzione $(1, 1, 2)$, quindi la retta cercata ha equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

c) Per determinare la distanza del piano π da P possiamo usare direttamente la formula

$$d(\pi, P) = \frac{|\,2\,|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

In alternativa potevamo determinare l'intersezione Q tra la retta s e π e calcolare la distanza di P da Q.

□

Esercizio 0.2. *Dato un parametro reale k, si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2k & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2k & k \end{bmatrix} \qquad\qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - 3k \\ k - 3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

a) *Si trovi, al variare di k, la dimensione e una base dello spazio $N(A)$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A.*
b) *Si risolva il sistema $AX = b$ al variare di k.*

SOLUZIONE:
Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & -2k & -1 & | & -1-3k \\ -1 & 0 & 3 & | & k-3 \\ 0 & -2k & k & | & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2k & 1 & | & -2-3k \\ 0 & 0 & 1 & | & k-2 \\ 0 & -2k & k & | & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2k & 1 & | & -2-3k \\ 0 & 0 & 1 & | & k-2 \\ 0 & 0 & k-1 & | & 3k-6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (k-1)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2k & 1 & | & -2-3k \\ 0 & 0 & 1 & | & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -k^2+6k+8 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo il sistema $A|0$ e quindi il rango di A.
   - Se $k \neq 0$, la matrice A ha rango 3, quindi $\dim(\mathrm{N}(A)) = 0$ e $\mathrm{N}(A) = \{(0,0,0)\}$.
   - Se $k = 0$, la matrice A ha rango 2, quindi $\dim(\mathrm{N}(A)) = 1$ e otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases}$$

   e una base del nucleo di A è $\mathcal{B}(\mathrm{N}(A)) = \{(0,1,0)\}$.

b) Notiamo che $-k^2 + 6k - 8 = 0$ se $k = 2$ o $k = 4$, quindi
   - Se $k \neq 2, 4$, l'ultima equazione diventa impossibile e il sistema non ammette soluzione.
   - Se $k = 2$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ -4y + z = -8 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

   - Se $k = 4$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ -8y + z = -14 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

□

Esercizio 0.3. *Dare la definizione di* prodotto scalare *di due vettori geometrici del piano o dello spazio. Descrivere la relazione tra il prodotto scalare e l'ortogonalità tra vettori. Illustrare con esempi.*

Esercizio 0.4. *Si consideri l'insieme*

$$\{V = \{v = (a_1 + 2a_2 - a_3, a_2 - a_3, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.\}$$

a) *Si mostri che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*
b) *Trovare una base di V e stabilire se $V = \mathbb{R}^3$*

SOLUZIONE:
Dalla definizione, il generico elemento v di V è del tipo:

$$v = a_1 \cdot (1,0,1) + a_2 \cdot (2,1,1) + a_3 \cdot (-1,-1,0) \qquad \text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Per quanto visto sopra, V è l'insieme delle combinazioni lineari dei tre vettori $(1,0,1)$, $(2,1,1)$, $(-1,-1,0)$, quindi $V = \langle (1,0,1),\ (2,1,1),\ (-1,-1,0) \rangle$ ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
b) Riduciamo a gradini la matrice associata ai tre generatori di V:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   La matrice ha rango due quindi $\dim(V) = 2$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{(1,0,1),\ (2,1,1)\}$.

V non coincide con $\mathbb{R}^3$ in quanto è un suo sottospazio di dimensione due, mentre $\mathbb{R}^3$ ha dimensione tre.

□

Esercizio 0.5. *Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a due:*

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p(2) = p(0) = 0\}$$
$$W = \langle p_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ p_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1,\ p_3(x) = 4x^3 + 5x + 3\rangle$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*
b) *Si determini la dimensione e una base di W.*
c) *Si stabilisca se V è un sottospazio di W.*

SOLUZIONE:

a) Il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}_3[x]$ è formato dai polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tali che:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=t \\ b=-3t \\ c=2t \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \quad p(x) = t\cdot(x^3-3x^2+2x)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi V ha dimensione uno e una base di V è data dall'insieme $\mathcal{B} = \left\{p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x\right\}$.

b) Al generico polinomio ax^3+bx^2+cx+d di $\mathbb{R}_3[x]$, associamo il vettore formato dalle sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^3, x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$, quindi ai polinomi $p_i(x)$ associamo i vetori:

$$\begin{aligned} p_1(x) &\longrightarrow p_1 = (1,1,1,1) \\ p_2(x) &\longrightarrow p_2 = (2,-2,3,1) \\ p_3(x) &\longrightarrow p_3 = (4,0,5,3) \end{aligned}$$

Per calcolare la dimensione e una base di W possiamo equivalentemente lavorare sullo spazio $W' = \langle p_1, p_2, p_3\rangle$. Riduciamo quindi a gradini la matrice formata dai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/4II \\ 4III+II \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza W ha dimensione due e una sua base è data dalle colonne corrispondenti ai pivot:

$$\mathcal{B}(W) = \left\{p_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ p_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right\}$$

c) Poichè V ha dimensione uno è sufficiente stabilire se il suo generatore $p(x)$ appartiene a W, ovvero se è combinazione lineare di $p_1(x)$ e $p_2(x)$. Passando ai vettori associati, si tratta di stabilire l'equazione vettoriale $xp_1 + yp_2 = p$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale equazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & -2 & | & -3 \\ 1 & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/4II \\ 4III+II \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa coincidono, quindi il sistema ha soluzione, $p(x) \in W$ e quindi V è un sottospazio di W.

Notiamo, anche se non era richiesto, che $p(x) = p_2(x) - p_1(x)$, cosa che potevamo osservare dall'inizio per svolgere il punto c) più rapidamente.

□

Esercizio 0.6. *Cos'è una* base *di uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e per uno spazio di matrici.*