

Esercizio 0.1. Si considerino le seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad r_2 : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

- Dimostrare che r_1 e r_2 sono complanari e trovare un'equazione cartesiana del piano π che le contiene.
- Determinare un'equazione parametrica della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare al piano π trovato al punto precedente.
- Calcolare la distanza di P da π .

SOLUZIONE:

Scriviamo r_2 in forma parametrica:

$$r_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- La retta r_1 ha direzione $(-2, -1, -1)$ e la retta r_2 ha direzione $(0, -1, 1)$, quindi le rette non sono parallele e sono complanari solo se si intersecano in un punto. Mettendo a sistema r_1 in forma parametrica con r_2 in forma cartesiana otteniamo:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 - t \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - t - 5 - t = 0 \\ 1 - 2t + 3 - t - 5 - t = 3 \\ x = 1 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 3 \\ y = 4 \\ z = -4 \end{cases}$$

Le rette r_1 e r_2 sono incidenti nel punto $A(3, 4, -4)$, quindi sono complanari.

Il piano π che le contiene lo possiamo ottenere mediante le direzioni delle due rette ed un qualsiasi punto di una delle due rette:

$$\pi : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -t - s \\ z = -t + s \end{cases} \Rightarrow x - y - z = 3$$

- Ogni retta perpendicolare a π ha direzione $(1, -1, -1)$, quindi la retta cercata ha equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Per determinare la distanza del piano π da P possiamo usare direttamente la formula

$$d(\pi, P) = \frac{|-4|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

In alternativa potevamo determinare l'intersezione Q tra la retta s e π e calcolare la distanza di P da Q .

□

Esercizio 0.2. Dato un parametro reale k , si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2k & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2k & k \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5k - 1 \\ -k + 3 \\ -k - 6 \end{bmatrix}$$

- a) Si trovi, al variare di k , la dimensione e una base dello spazio $N(A)$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A .
- b) Si risolva il sistema $AX = b$ al variare di k .

SOLUZIONE:

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2k & 3 & 5k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 3-k \\ 0 & 2k & k & -k-6 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{array}{l} II-I \\ III-I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2k & 1 & 5k-2 \\ 0 & 0 & -1 & 2-k \\ 0 & 2k & k & -k-6 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} -III \\ IV+II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2k & 1 & 5k-2 \\ 0 & 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & k+1 & 4k-8 \end{array} \right] \\ \Rightarrow &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2k & 1 & 5k-2 \\ 0 & 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2+5k-6 \end{array} \right] \\ &IV - (k+1)III \end{aligned}$$

- a) Consideriamo il sistema $A|0$ e quindi il rango di A .
- Se $k \neq 0$, la matrice A ha rango 3, quindi $\dim(N(A)) = 0$ e $N(A) = \{(0, 0, 0)\}$.
 - Se $k = 0$, la matrice A ha rango 2, quindi $\dim(N(A)) = 1$ e otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases}$$

e una base del nucleo di A è $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0, 1, 0)\}$.

- b) Notiamo che $-k^2 + 5k - 6 = 0$ se $k = 2$ o $k = 3$, quindi
- Se $k \neq 2, 3$, l'ultima equazione diventa impossibile e il sistema non ammette soluzione.
 - Se $k = 2$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -4y + z = 8 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Se $k = 3$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -6y + z = 13 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

□

Esercizio 0.3. Cos'è un gruppo? Cos'è un gruppo commutativo? L'insieme degli interi relativi \mathbb{Z} è un gruppo rispetto al prodotto? Dare un esempio di gruppo non commutativo.

Esercizio 0.4. Si consideri l'insieme

$$\{V = \{v = (a_1 + a_3, 2a_1 + a_2 + a_3, -a_1 - a_2) \in \mathbb{R}^3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.\}$$

- a) Si mostri che V è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
- b) Trovare una base di V e stabilire se $V = \mathbb{R}^3$

SOLUZIONE:

Dalla definizione, il generico elemento v di V è del tipo:

$$v = a_1 \cdot (1, 2, -1) + a_2 \cdot (0, 1, -1) + a_3 \cdot (1, 1, 0) \quad \text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

- a) Per quanto visto sopra, V è l'insieme delle combinazioni lineari dei tre vettori $(1, 2, -1)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 1, 0)$, quindi $V = \langle (1, 2, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 0) \rangle$ ed è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
- b) Riduciamo a gradini la matrice associata ai tre generatori di V :

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} II-2 \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III+II \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La matrice ha rango due quindi $\dim(V) = 2$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{(1, 2, -1), (0, 1, -1)\}$.

V non coincide con \mathbb{R}^3 in quanto è un suo sottospazio di dimensione due, mentre \mathbb{R}^3 ha dimensione tre.

□

Esercizio 0.5. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a due:

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p(-1) = p(0) = 0\}$$

$$W = \langle p_1(x) = x^3 + x - 1, p_2(x) = 3x^3 + x - 2, p_3(x) = -2x + 1 \rangle$$

- Si determini la dimensione e una base di V .
- Si determini la dimensione e una base di W .
- Si stabilisca se V è un sottospazio di W .

SOLUZIONE:

- Il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}_3[x]$ è formato dai polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tali che:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = 0 \\ c = -t \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow p(x) = t \cdot (x^3 - x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi V ha dimensione uno e una base di V è data dall'insieme $\mathcal{B} = \{p(x) = x^3 - x\}$.

- Al generico polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ di $\mathbb{R}_3[x]$, associamo il vettore formato dalle sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^3, x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$, quindi ai polinomi $p_i(x)$ associamo i vettori:

$$p_1(x) \rightarrow p_1 = (1, 0, 1, -1)$$

$$p_2(x) \rightarrow p_2 = (3, 0, 1, -2)$$

$$p_3(x) \rightarrow p_3 = (0, 0, -2, 1)$$

Per calcolare la dimensione e una base di W possiamo equivalentemente lavorare sullo spazio $W' = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$. Riduciamo quindi a gradini la matrice formata dai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} III - I \\ IV + I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -1/2II \\ 2III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza W ha dimensione due e una sua base è data dalle colonne corrispondenti ai pivot:

$$\mathcal{B}(W) = \{p_1(x) = x^3 + x - 1, p_2(x) = 3x^3 + x - 2\}$$

- Poichè V ha dimensione uno è sufficiente stabilire se il suo generatore $p(x)$ appartiene a W , ovvero se è combinazione lineare di $p_1(x)$ e $p_2(x)$. Passando ai vettori associati, si tratta di stabilire l'equazione vettoriale $xp_1 + yp_2 = p$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale equazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & -1 \\ -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} III - I \\ IV + I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -1/2II \\ 2III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa coincidono, quindi il sistema ha soluzione, $p(x) \in W$ e quindi V è un sottospazio di W .

Notiamo, anche se non era richiesto, che $p(x) = -2p_1(x) + p_2(x)$, cosa che potevamo osservare dall'inizio per svolgere il punto c) più rapidamente.

□

Esercizio 0.6. Cos'è un insieme linearmente indipendente in uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per vettori di \mathbb{R}^4 e per uno spazio di polinomi.