PRIMO APPELLO - *GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE* – D – 27/06/2013

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. INF. ORG.

Esercizio 0.1. *Si considerino i seguenti piani:*

$$\pi_1 : \; x + y - 2z = -4, \qquad \pi_2 : \; 3x - 4y - 6z = 2$$

a) *Determinare un'equazione parametrica della retta r contenuta in entrambi i piani.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ e ortogonale a π_1 e a π_2.*

SOLUZIONE:

a) La retta r contenuta in entrambi i piani è data dall'intersezione tra i due piani. È quindi sufficiente mettere a sistema l'equazioni dei piani:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -4 \\ 3x - 4y - 6z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2z - 4 \\ -7y = 14 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) Un piano ortoganale a π_1 e a π_2 è anche ortogonale alla retta r trovata al punto precedente. Essendo r parallela al vettore $(2, 0, 1)$, il piano π cercato ha equazione del tipo $2x + z = d$; imponendo il passaggio per P otteniamo il piano $\pi : \; 2x + z = 5$.

□

Esercizio 0.2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2k-4 & k & 0 & 1 \\ 2k & k-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ k-4 & 2k & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con } k \text{ parametro reale}$$

a) *Si calcoli il determinante di A e si stabilisca per quali k vale zero.*
b) *Si determini il rango di A al variare di k.*
c) *Si determini la dimensione del nucleo di A, cioè dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A.*

SOLUZIONE:

a) Sviluppando rispetto alla terza colonna otteniamo

$$\det(A) = -(k-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 2k-4 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ k-4 & 2k & 1 \end{bmatrix} = -(k-1)^2 \det \begin{bmatrix} 2k-4 & 1 \\ k-4 & 1 \end{bmatrix} = -k(k-1)^2$$

Di conseguenza il determinante si annulla per $k = 0$ o $k = 1$.

b) Dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, per quanto ottenuto al punto precedente, il rango di A è quattro.
   – Se $k = 0$, poiché $\det(A) = 0$, si ha $\text{rg}(A) \leq 3$. In particolare otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di determinante $-4 \cdot (-1) = 4 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

– Se $k = 1$, come nel caso precedente sappiamo che $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A è

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

di determinante $-2 \cdot (1-2) = 2 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

c) Per il teorema di nullità più rango si sa che $\dim(\text{N}(A)) = 4 - \text{rg}(A)$. Di conseguenza:
   – Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 4 = 0$.
   – Se $k = 0$ o $k = 1$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 3 = 1$.

$\square$

Esercizio 0.3. *Cos'è un insieme* linearmente indipendente *in uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per vettori di* $\mathbb{R}^4$ *e per uno spazio di polinomi.*

Esercizio 0.4. *Data la matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -k \end{bmatrix}$ *con* $k \in \mathbb{R}$, *si consideri l'insieme*

$$S = \{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

a) *Si dimostri che* S *è un sottospazio vettoriale dello spazio* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
b) *Si calcoli la dimensione di* S *e si determini una base di* S.
c) *Si dica per quali valori di* k *la matrice* A *è diagonalizzabile.*

SOLUZIONE:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora, se M_1 e M_2 appartengono a S e quindi commutano con A, si ha:

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.
   – **Prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

   Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Esplicitiamo S. Sia $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la generica matrice di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, di consegunenza

$$AM = \begin{bmatrix} -x & -y \\ 2x - kz & 2y - kw \end{bmatrix} \qquad MA = \begin{bmatrix} -x + 2y & -ky \\ -z + 2w & -kw \end{bmatrix}$$

La condizione $AM = MA$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} -x = -x + 2y \\ -y = -ky \\ 2x - kz = -z + 2w \\ 2y - kw = -kw \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + (1-k)z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (k-1)t + s \\ y = 0 \\ z = 2t \\ w = s \end{cases}$$

Di conseguenza la generica matrice M è del tipo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} k-1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot t$$

Infine una base di S è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k-1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e $\dim(S) = 2$.

c) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (-1-\lambda)(-k-\lambda)$. Di conseguenza A ha come autovalori $\lambda = -1$ e $\lambda = -k$. Dobbiamo quindi distinguere due casi.
   – Se $k \neq 1$, allora A è una matrice 2×2 con due autovalori singoli ed è quindi diagonalizzabile.

– Se $k=1$ dobbiamo determinare la dimensione dell'autospazio $E(-1)$.

$$E(-1) = \mathrm{N}(A+I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad E(-1) = \langle (1,0) \rangle$$

Dal momento che l'unico autospazio $E(-1)$ ha dimensione uno, in questo caso A non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 0.5. *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_3, kx_1 - x_2, 2x_1 + x_3, x_2 + kx_3)$$

e sia $v = (3, -1, 2, 2k)$, con k parametro reale.

a) *Si trovino basi del nucleo e dell'immagine di T al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali k l'applicazione T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Si stabilisca per quali k il vettore v appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gratini la matrice completa $M|v$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ k & -1 & 0 & | & -1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & k & | & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - kI \\ 3III - 2I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & k & | & -3-3k \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 1/5III \\ 3IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & k & | & -3-3k \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4k & | & 3k-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 4kIII \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & k & | & -3-3k \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3k-3 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la matrice M. Per ogni valore di k, M ha rango tre, quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$. Inoltre una base di $\mathrm{Im}(T)$ è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} = \{(3, k, 2, 0), (0, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, k)\}$$

Il nucleo è formato dal solo vettore nullo di $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$

b) Poiché per ogni k il nucleo di T ha sempre dimensione zero, T è iniettiva per ogni k. La dimensione dell'immagine è invece tre per ogni k, quindi $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$ e T non è mai suriettiva. Notiamo anche che un'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ non può essere suriettiva.

c) Il vettore v appartiene all'immagine di T se $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v)$, quindi se $k = 1$.

□

Esercizio 0.6. *Cos'è la* matrice associata *ad una funzione lineare $T : V \to W$? Quali proprietà di T si riconoscono facilmente da una sua matrice associata? Dare un esempio numerico per una funzione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.*