PRIMO APPELLO - *GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE* – C – 27/06/2013

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. INF. ORG.

Esercizio 0.1. *Si considerino i seguenti piani:*

$$\pi_1 : \ x + 2y + z = 8, \qquad \pi_2 : \ x - 4y + 2z = -10$$

a) *Determinare un'equazione parametrica della retta r contenuta in entrambi i piani.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ e ortogonale a π_1 e a π_2.*

SOLUZIONE:

a) La retta r contenuta in entrambi i piani è data dall'intersezione tra i due piani. È quindi sufficiente mettere a sistema l'equazioni dei piani:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - 4y + 2z = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - z + 8 \\ -6y + z = -18 \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x = -8t + 26 \\ y = t \\ z = 6t - 18 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) Un piano ortoganale a π_1 e a π_2 è anche ortogonale alla retta r trovata al punto precedente. Essendo r parallela al vettore $(-8, 1, 6)$, il piano π cercato ha equazione del tipo $-8x + y + 6z = d$; imponendo il passaggio per P otteniamo il piano $\pi : \ -8x + y + 6z = 12$.

□

Esercizio 0.2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} k-3 & 2k+2 & 0 & 1 \\ 2k-2 & k+1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 2k+2 & k & k & k \end{bmatrix} \qquad \textit{con } k \textit{ parametro reale}$$

a) *Si calcoli il determinante di A e si stabilisca per quali k vale zero.*
b) *Si determini il rango di A al variare di k.*
c) *Si determini la dimensione del nucleo di A, cioè dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A.*

SOLUZIONE:

a) Sviluppando rispetto alla terza riga otteniamo

$$\det(A) = -k \cdot \det \begin{bmatrix} k-3 & 0 & 1 \\ 2k-2 & 0 & 1 \\ 2k+2 & k & k \end{bmatrix} = k^2 \cdot \det \begin{bmatrix} k-3 & 1 \\ 2k-2 & 1 \end{bmatrix} = k^2(-k-1)$$

Di conseguenza il determinante si annulla per $k = 0$ o $k = -1$.

b) Dobbiamo distinguere tre casi:
- Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$, per quanto ottenuto al punto precedente, il rango di A è quattro.
- Se $k = 0$, poiché $\det(A) = 0$, si ha $\text{rg}(A) \leq 3$. In particolare otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di determinante $2 \cdot (2 - 1) = 2 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

- Se $k = -1$, come nel caso precedente sappiamo che $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A è
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3:
$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-4 \cdot 1 = -4 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

c) Per il teorema di nullità più rango si sa che $\dim(\text{N}(A)) = 4 - \text{rg}(A)$. Di conseguenza:
- Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 4 = 0$.
- Se $k = 0$ o $k = -1$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 3 = 1$.

$\square$

Esercizio 0.3. *Cos'è un insieme di* generatori *di uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per un sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *e per uno spazio di matrici.*

Esercizio 0.4. *Data la matrice* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ *con* $k \in \mathbb{R}$, *si consideri l'insieme*
$$S = \{M \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

a) *Si dimostri che* S *è un sottospazio vettoriale dello spazio* $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.
b) *Si calcoli la dimensione di* S *e si determini una base di* S.
c) *Si dica per quali valori di* k *la matrice* A *è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
- **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora, se M_1 e M_2 appartengono a S e quindi commutano con A, si ha:
$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$
Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.
- **Prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora
$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$
Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Esplicitiamo S. Sia $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la generica matrice di $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, di consegunenza
$$AM = \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ kx + z & ky + w \end{bmatrix} \qquad MA = \begin{bmatrix} 3x + ky & y \\ 3z + kw & w \end{bmatrix}$$
La condizione $AM = MA$ si traduce nel sistema
$$\begin{cases} 3x = 3x + ky \\ 3y = y \\ kx + z = 3z + kw \\ ky + w = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ kx - 2z - kw = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2s \\ y = 0 \\ z = ks - kt \\ w = 2t \end{cases}$$
Di consegunza la generica matrice M è del tipo
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k & 2 \end{bmatrix} \cdot t$$
Infine una base di S è data dall'insieme
$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k & 2 \end{bmatrix} \right\}$$
e $\dim(S) = 2$.

c) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(k - \lambda)$. Di conseguenza A ha come autovalori $\lambda = 3$ e $\lambda = k$. Dobbiamo quindi distinguere due casi.
- Se $k \neq 3$, allora A è una matrice 2×2 con due autovalori singoli ed è quindi diagonalizzabile.

– Se $k = 3$ dobbiamo determinare la dimensione dell'autospazio $E(3)$.

$$E(3) = \mathrm{N}(A - 3I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle (1,0) \rangle$$

Dal momento che l'unico autospazio $E(3)$ ha dimensione uno, in questo caso A non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 0.5. *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - kx_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3, kx_1 - x_3)$$

e sia $v = (4, 2, k, k)$, con k parametro reale.

a) *Si trovino basi del nucleo e dell'immagine di T al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali k l'applicazione T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Si stabilisca per quali k il vettore v appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gratini la matrice completa $M|v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -k & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & k \\ k & 0 & -1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -k & | & 4 \\ k & 0 & -1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \\ IV - kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1-k & | & k - k^2 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la matrice M. Anche senza avere completato la riduzione, dal momento che i due possibili pivot $-k-2$ e $-1-k$ non si annullano contemporaneamente, per ogni valore di k la matrice M ha rango tre, quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$. Inoltre una base di $\mathrm{Im}(T)$ è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} = \{(0,0,1,k), (2,1,0,0), (-k,1,1,-1)\}$$

Il nucleo è formato dal solo vettore nullo di $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$

b) Poiché per ogni k il nucleo di T ha sempre dimensione zero, T è iniettiva per ogni k. La dimensione dell'immagine è invece tre per ogni k, quindi $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$ e T non è mai suriettiva. Notiamo anche che un'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ non può essere suriettiva.

c) Completiamo la riduzione della matrice

$$\begin{matrix} \\ \\ III - IV \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & k^2 - k \\ 0 & 0 & -1-k & | & k - k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + (-k-1)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & k^2 - k \\ 0 & 0 & 0 & | & -k(k+2)(k-1) \end{bmatrix}$$

Il vettore v appartiene all'immagine di T se $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v)$. , quindi se $k = 0$ o $k = 1$ o $k = -2$.

□

Esercizio 0.6. *Quando una matrice quadrata si dice* diagonalizzabile*? Ogni matrice quadrata lo è? Fornire degli esempi per illustrare la risposta.*