

Esercizio 0.1. Si considerino i seguenti piani:

$$\pi_1 : 3x + y + z = 7, \quad \pi_2 : 6x - 9y + 2z = 3$$

- Determinare un'equazione parametrica della retta r contenuta in entrambi i piani.
- Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ e ortogonale a π_1 e a π_2 .

SOLUZIONE:

- La retta r contenuta in entrambi i piani è data dall'intersezione tra i due piani. È quindi sufficiente mettere a sistema l'equazioni dei piani:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 7 \\ 6x - 9y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x - z + 7 \\ 6x + 27x + 9z - 63 + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x - z + 7 \\ 33x + 11z = 66 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -3t + 6 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Un piano ortogonale a π_1 e a π_2 è anche ortogonale alla retta r trovata al punto precedente. Essendo r parallela al vettore $(1, 0, -3)$, il piano π cercato ha equazione del tipo $x - 3z = d$; imponendo il passaggio per P otteniamo il piano $\pi : x - 3z = -8$.

□

Esercizio 0.2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} k+2 & k+2 & 2k+6 & k+2 \\ k+3 & 0 & 2k+2 & 1 \\ 2k+6 & 0 & k-1 & 1 \\ k+2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } k \text{ parametro reale}$$

- Si calcoli il determinante di A e si stabilisca per quali k vale zero.
- Si determini il rango di A al variare di k .
- Si determini la dimensione del nucleo di A , cioè dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A .

SOLUZIONE:

- Sviluppando rispetto alla seconda colonna otteniamo

$$\det(A) = -(k+2) \cdot \det \begin{bmatrix} k+3 & 2k+2 & 1 \\ 2k+6 & k-1 & 1 \\ k+2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -(k+2)^2 \det \begin{bmatrix} 2k+2 & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix} = -(k+2)^2(k+3)$$

Di conseguenza il determinante si annulla per $k = -2$ o $k = -3$.

- Dobbiamo distinguere tre casi:
 - Se $k \neq -2$ e $k \neq -3$, per quanto ottenuto al punto precedente, il rango di A è quattro.
 - Se $k = -2$, poiché $\det(A) = 0$, si ha $\text{rg}(A) \leq 3$. In particolare otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

di determinante $-2 \cdot (1 - 2) = 2 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

– Se $k = -3$, come nel caso precedente sappiamo che $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3 :

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di determinante $1 \cdot (-4) = -4 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

- c) Per il teorema di nullità più rango si sa che $\dim(\text{N}(A)) = 4 - \text{rg}(A)$. Di conseguenza:
- Se $k \neq -2$ e $k \neq -3$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 4 = 0$.
 - Se $k = -2$ o $k = -3$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 3 = 1$.

□

Esercizio 0.3. *Cos'è il sottospazio generato da k vettori v_1, \dots, v_k di uno spazio vettoriale V ? Cosa si può dire della sua dimensione? Dare degli esempi in \mathbb{R}^3 e in uno spazio di polinomi.*

Esercizio 0.4. *Data la matrice $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'insieme*

$$S = \{M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

- a) *Si dimostri che S è un sottospazio vettoriale dello spazio $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.*
- b) *Si calcoli la dimensione di S e si determini una base di S .*
- c) *Si dica per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile.*

SOLUZIONE:

- a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
 - **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A . Allora, se M_1 e M_2 appartengono a S e quindi commutano con A , si ha:

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S .

- **Prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A , e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S .

- b) Esplicitiamo S . Sia $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la generica matrice di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, di conseguenza

$$AM = \begin{bmatrix} kx + z & ky + w \\ 2z & 2w \end{bmatrix} \quad MA = \begin{bmatrix} kx & x + 2y \\ kz & z + 2w \end{bmatrix}$$

La condizione $AM = MA$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} kx + z = kx \\ ky + w = x + 2y \\ 2z = kz \\ 2w = z + 2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + (2 - k)y - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (k - 2)t + s \\ y = t \\ z = 0 \\ w = s \end{cases}$$

Di conseguenza la generica matrice M è del tipo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} k - 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t$$

Infine una base di S è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k - 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e $\dim(S) = 2$.

- c) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (k - \lambda)(2 - \lambda)$. Di conseguenza A ha come autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = k$. Dobbiamo quindi distinguere due casi.
 - Se $k \neq 2$, allora A è una matrice 2×2 con due autovalori singoli ed è quindi diagonalizzabile.

– Se $k = 2$ dobbiamo determinare la dimensione dell'autospazio $E(1)$.

$$E(2) = N(A - 2I) : \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow y = 0 \Rightarrow E(2) = \langle (0, 1) \rangle$$

Dal momento che l'unico autospazio $E(2)$ ha dimensione uno, in questo caso A non è diagonalizzabile. □

Esercizio 0.5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + x_3, 2kx_1 - x_2, kx_1 - x_2)$$

e sia $v = (-3, 0, 0, -k)$, con k parametro reale.

- Si trovino basi del nucleo e dell'immagine di T al variare di k .
- Si stabilisca per quali k l'applicazione T è iniettiva e/o suriettiva.
- Si stabilisca per quali k il vettore v appartiene all'immagine di T .

SOLUZIONE:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2k & -1 & 0 \\ k & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $M|v$.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2k & -1 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & -k \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{array}{l} III - 2kI \\ 2IV - III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 + 4k & 0 & 6k \\ 0 & -1 & 0 & -2k \end{array} \right] \Rightarrow \\ \begin{array}{l} III - (4k - 1)II \\ IV + II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4k & 6k \\ 0 & 0 & 1 & -2k \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{array}{l} IV \\ III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 1 - 4k & 6k \end{array} \right] \Rightarrow \\ IV + (4k - 1)III &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 0 & -8k^2 + 8k \end{array} \right] \end{aligned}$$

Per la riduzione si potevano notevolmente semplificare i conti effettuando degli scambi di colonne, per esempio scambiando prima e terza colonna al primo passaggio.

- Consideriamo solo la matrice M . Per ogni valore di k , M ha rango tre, quindi $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M) = 3$ e $\dim(N(T)) = 3 - 3 = 0$. Inoltre una base di $\text{Im}(T)$ è data da

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} = \{(1, 0, 2k, k), (-2, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 0)\}$$

Il nucleo è formato dal solo vettore nullo di \mathbb{R}^3 : $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$

- Poiché per ogni k il nucleo di T ha sempre dimensione zero, T è iniettiva per ogni k . La dimensione dell'immagine è invece tre per ogni k , quindi $\text{Im}(T)$ è un sottospazio proprio di \mathbb{R}^4 e T non è mai suriettiva. Notiamo anche che un'applicazione da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^4 non può essere suriettiva.
- Il vettore v appartiene all'immagine di T se $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|v)$, quindi se $k = 0$ o $k = 1$. □

Esercizio 0.6. Cosa sono le molteplicità algebriche e geometriche di un autovalore di una matrice? Possono essere diverse? Dare un esempio numerico per una matrice 3×3 .