PRIMO APPELLO - *GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE* – A – 27/06/2013

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. INF. ORG.

Esercizio 0.1. *Si considerino i seguenti piani:*

$$\pi_1: \ 2x + y - z = 1, \qquad \pi_2: \ 4x + 2y + z = 5$$

a) *Determinare un'equazione parametrica della retta r contenuta in entrambi i piani.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ e ortogonale a π_1 e a π_2.*

Soluzione:

a) La retta r contenuta in entrambi i piani è data dall'intersezione tra i due piani. È quindi sufficiente mettere a sistema l'equazioni dei piani:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 4x + 2y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \qquad r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) Un piano ortoganale a π_1 e a π_2 è anche ortogonale alla retta r trovata al punto precedente. Essendo r parallela al vettore $(1, -2, 0)$, il piano π cercato ha equazione del tipo $x - 2y = d$; imponendo il passaggio per P otteniamo il piano $\pi: \ x - 2y = -3$.

□

Esercizio 0.2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} k+2 & 0 & 2k & 1 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ k+1 & k+1 & 2k+4 & k+1 \\ 2k+4 & 0 & k-2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con } k \text{ parametro reale}$$

a) *Si calcoli il determinante di A e si stabilisca per quali k vale zero.*
b) *Si determini il rango di A al variare di k.*
c) *Si determini la dimensione del nucleo di A, cioè dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A.*

Soluzione:

a) Sviluppando rispetto alla seconda riga otteniamo

$$\det(A) = -(k+1) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2k & 1 \\ k+1 & 2k+4 & k+1 \\ 0 & k-2 & 1 \end{bmatrix} = (k+1)^2 \det \begin{bmatrix} 2k & 1 \\ k-2 & 1 \end{bmatrix} = (k+1)^2(k+2)$$

Di conseguenza il determinante si annulla per $k = -1$ o $k = -2$.

b) Dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq -1$ e $k \neq -2$, per quanto ottenuto al punto precedente, il rango di A è quattro.
   – Se $k = -1$, poiché $\det(A) = 0$, si ha $\text{rg}(A) \leq 3$. In particolare otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

di determinante $2 \cdot (1 - 2) = -2 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

- Se $k=-2$, come nel caso precedente sappiamo che $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A è
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$
Si può procedere con la riduzione, oppure osservare che A contiene la sottomatrice 3×3:
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-1 \cdot (-4) = 4 \neq 0$. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$

c) Per il teorema di nullità più rango si sa che $\dim(\text{N}(A)) = 4 - \text{rg}(A)$. Di conseguenza:
- Se $k \neq -1$ e $k \neq -2$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 4 = 0$.
- Se $k = -1$ o $k = -2$, si ha $\dim(\text{N}(A)) = 4 - 3 = 1$.

□

Esercizio 0.3. *Cos'è una* base *di uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per un sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *e per uno spazio di matrici.*

Esercizio 0.4. *Data la matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ *con* $k \in \mathbb{R}$, *si consideri l'insieme*
$$S = \{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

a) *Si dimostri che S è un sottospazio vettoriale dello spazio $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*
b) *Si calcoli la dimensione di S e si determini una base di S.*
c) *Si dica per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
- **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora, se M_1 e M_2 appartengono a S e quindi commutano con A, si ha:
$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$
Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.
- **Prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora
$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$
Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Esplicitiamo S. Sia $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la generica matrice di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, di consegunenza
$$AM = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ kz & kw \end{bmatrix} \qquad MA = \begin{bmatrix} x & -x+ky \\ z & -z-w \end{bmatrix}$$
La condizione $AM = MA$ si traduce nel sistema
$$\begin{cases} x - z = x \\ y - w = -x + ky \\ kz = z \\ kw = -z + kw \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + (1-k)y - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (k-1)t + s \\ y = t \\ z = 0 \\ w = s \end{cases}$$
Di conseguenza la generica matrice M è del tipo
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} k-1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t$$
Infine una base di S è data dall'insieme
$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k-1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
e $\dim(S) = 2$.

c) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(k-\lambda)$. Di conseguenza A ha come autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = k$. Dobbiamo quindi distinguere due casi.
- Se $k \neq 1$, allora A è una matrice 2×2 con due autovalori singoli ed è quindi diagonalizzabile.

– Se $k=1$ dobbiamo determinare la dimensione dell'autospazio $E(1)$.

$$E(1) = \mathrm{N}(A-I): \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -y = 0 \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle (0,1) \rangle$$

Dal momento che l'unico autospazio $E(1)$ ha dimensione uno, in questo caso A non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 0.5. *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, kx_2 + x_3, 2x_1 + x_2, kx_1 - x_3)$$

e sia $v = (1, 2, 4, k)$, con k parametro reale.

a) *Si trovino basi del nucleo e dell'immagine di T al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali k l'applicazione T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Si stabilisca per quali k il vettore v appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gratini la matrice completa $M|v$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & k & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 0 & | & 4 \\ k & 0 & -1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III - 2II \\ 3IV - kI \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & k & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 0 & | & 10 \\ 0 & k & -3 & | & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/5III \\ II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & k & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -4 & | & 2k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - kII \\ 1/2IV \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2-2k \\ 0 & 0 & -2 & | & k-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV + 2III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2-2k \\ 0 & 0 & 0 & | & -3k+3 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la matrice M. Per ogni valore di k, M ha rango tre, quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$. Inoltre una base di $\mathrm{Im}(T)$ è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} = \{(3,0,2,k), (-1,k,1,0), (0,1,0,-1)\}$$

Il nucleo è formato dal solo vettore nullo di $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$

b) Poiché per ogni k il nucleo di T ha sempre dimensione zero, T è iniettiva per ogni k. La dimensione dell'immagine è invece tre per ogni k, quindi $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$ e T non è mai suriettiva. Notiamo anche che un'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ non può essere suriettiva.

c) Il vettore v appartiene all'immagine di T se $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v)$, quindi se $k = 1$.

□

Esercizio 0.6. *Come si definisce il* polinomio caratteristico *di una funzione lineare $T : V \to V$? Che relazione ha con gli autovalori di T? Dare un esempio numerico per una funzione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.*