

RETTE

- In \mathbb{R}^2 l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2)$ è:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- In \mathbb{R}^2 la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è:

$$r : \quad ax + by + k = 0$$

- In \mathbb{R}^3 l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2, u_3)$ è:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- In \mathbb{R}^3 la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è data dall'intersezione di due piani:

$$r : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 \end{cases}$$

PIANI

- In \mathbb{R}^3 l'equazione **parametrica** del **piano** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzioni parallele ai vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ è:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t + v_1 s \\ y = y_0 + u_2 t + v_2 s \\ z = z_0 + u_3 t + v_3 s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

- In \mathbb{R}^3 la generica equazione **cartesiana** di un **piano** è :

$$\pi : \quad ax + by + cz = d$$

Il vettore (a, b, c) ha direzione perpendicolare al piano. Notiamo che i coefficienti a, b, c e d non sono unicamente determinati, ma possono variare a meno di multipli.

POSIZIONE TRA RETTE E PIANI

- Due rette r_1 e r_2 sono **parallele** se hanno la stessa direzione, ovvero se i rispettivi vettori direzione sono proporzionali.
- In \mathbb{R}^3 due rette r_1 e r_2 sono **sghembe** se non sono parallele e non si intersecano.
- In \mathbb{R}^3 due rette r_1 e r_2 sono **complanari** se non sono sghembe, ovvero se sono parallele oppure si intersecano.
- Due piani π_1 e π_2 sono **paralleli** se non si intersecano. Analogamente due piani $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$ e $\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$ sono paralleli se i vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono proporzionali.

- Una retta r è **perpendicolare** al piano $\pi : ax + by + cz = k$ se r ha direzione parallela al vettore $u = (a, b, c)$.
-

PRODOTTO SCALARE E ANGOLI

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di \mathbb{R}^3 chiamiamo **prodotto scalare** di u e v il numero:

$$(u, v) = u \cdot v^T = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

- Date due rette r_1 parallela a un vettore u e r_2 parallela a un vettore v , l'**angolo** ϑ tra le due rette è dato da:

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|},$$

dove $|u|$ = **norma** di u = **lunghezza** di $u = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{u \cdot u^T}$.

PRODOTTO VETTORIALE, AREA E VOLUME

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di \mathbb{R}^3 chiamiamo **prodotto vettoriale** di u e v il vettore:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

- L'**Area di un parallelogramma** in \mathbb{R}^2 , di lati $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ è:

$$\text{Area}(\text{parallelogramma}) = |u_1v_2 - u_2v_1| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

- L'**Area di un parallelogramma** in \mathbb{R}^3 , di lati $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ è data dalla lunghezza (norma) $|u \times v|$ del vettore $u \times v$ prodotto vettoriale di u e v :

$$\text{Area}(\text{parallelogramma}) = |u \times v|,$$

- Il **volume del parallelepipedo** di lati $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ è uguale al valore assoluto del prodotto misto $(u, v \times w)$:

$$\text{Volume}(\text{parallelepipedo}) = |(u, v \times w)| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$
