

## CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 11- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

**Esercizio 11.1.** [10.6] Determinare il valore del parametro  $k \in \mathbf{R}$  tale che i vettori

$$v = (1, 3, 7, -1), \quad w = (3, 5, 1, k)$$

siano ortogonali.

**Esercizio 11.2.** [10.9] Siano  $u = (4, 2, -2)$  e  $v = (3, -3, 2)$  vettori di  $\mathbf{R}^3$ .

- Calcolare le lunghezze di  $u$  e di  $v$  (rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbf{R}^3$ ).
- Trovare tutti i vettori  $w$  di lunghezza 1 ortogonali a  $u$  e a  $v$ .

**Esercizio 11.3.** [10.7] Siano assegnati i seguenti vettori di  $\mathbf{R}^4$ :

$$v = (2, -1, 0, 1), \quad w = (-1, 2, 0, 2)$$

- Si calcoli l'angolo tra i due vettori.
- Si determini la proiezione ortogonale di  $v$  su  $w$ .
- Si scriva  $v$  come somma di un vettore  $v_1$  multiplo di  $w$  e di un vettore  $v_2$  ortogonale a  $w$ .

**Esercizio 11.4.** [10.8] Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di  $\mathbf{R}^3$

$$v = (3, 4, -2), \quad w = (2, 1, -1)$$

**Esercizio 11.5.** [10.11] Data la base

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, 1)\}$$

di  $\mathbf{R}^3$ , si determini una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da  $\mathcal{B}$ .

**Esercizio 11.6.** [10.12] Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

**Esercizio 11.7.** [10.15] Si considerino i vettori di  $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

- Calcolare le lunghezze di  $v_1$  e di  $v_2$ .
- Determinare la proiezione ortogonale di  $v_1$  su  $v_2$ .
- Trovare una base ortonormale del sottospazio di  $\mathbf{R}^3$  generato dai vettori  $v_1$  e  $v_2$ .

**Esercizio 11.8.** [10.16] Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbf{R}^3$  costituito dai vettori  $(x_1, x_2, x_3)$  tali che  $2x_1 + x_2 = 0$ . Si determini una base ortonormale di  $U$  rispetto al prodotto scalare ordinario di  $\mathbf{R}^3$ .

**Esercizio 11.9.** [10.21] Sia  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  la funzione lineare tale che

$$T(1, -2, 1) = (2, 1), \quad T(1, 0, 0) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$

- Che dimensione ha l'immagine di  $T$ ?
- Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbf{R}^3$ ) del nucleo di  $T$ .

**Esercizio 11.10.** [11.1] [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato.] Calcolare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  formata da autovettori per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 11.11.** [11.2] Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche  $A$  si determini una matrice ortogonale  $P$  per la quale  $P^T A P$  sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 11.12.** [11.3] Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  con matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

- Stabilire se l'endomorfismo  $T$  è diagonalizzabile.
- Trovare basi ortonormali degli autospazi di  $T$  (rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbf{R}^3$ ).
- Trovare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  formata da autovettori di  $T$ .

**Esercizio 11.13.** [11.5] Sia  $A$  la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  costituita da autovettori di  $A$ .

**Esercizio 11.14.** [11.9] Si consideri il seguente endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax, bx + y + z, y + z)$$

con  $a$  e  $b$  parametri reali.

- Si discuta la diagonalizzabilità di  $T$  al variare di  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}$ .
- Posto  $a = b = 0$  si determini una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  formata da autovettori di  $T$ .

**Esercizio 11.15.** [11.13] Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2 + \sqrt{3}x_3, \sqrt{3}x_2)$$

- Stabilire se  $T$  è invertibile.
- Mostrare che  $T$  è un endomorfismo simmetrico.
- Trovare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  che diagonalizza  $T$ .