CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FOGLIO DI ESERCIZI 9– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 9.1. *[v.8.37]* Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da

$$T(x,y,z) = (3x-2y,\ x+y+z,\ 2x-3y-z)$$

a) Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.
b) Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = ((2,1,0),\ (1,1,0),\ (0,1,1))$.

Esercizio 9.2. *[8.40]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (2x, x-y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = ((1,0),\ (1,1)\ )$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2))$ due basi di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Esercizio 9.3. *[8.44]* Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$la funzione lineare associata a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $((1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3))$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Si scriva la matrice associata a S rispetto alla base canonica.
b) Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.

Esercizio 9.4. *[8.18]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x,y,z) = (2x, y, 0)$$

(1) Dato il vettore $w = (2,-1,1)$, calcolare $T(w)$.
(2) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
(3) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A.
(4) Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali $Im(T)$ e $\mathrm{N}(T)$.
(5) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ con $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$, $v_3 = (1,1,-1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
(6) Determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza e alla base canonica $\mathcal{E}$ dello spazio di arrivo, cioè $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$.
(7) Determinare le componenti del vettore $w = (2,-1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(8) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B.

Esercizio 9.5. *[8.36]* Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare

$$S(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1-2x_3+x_4,\ 4x_1-2x_2+2x_3+3x_4,\ x_1+2x_3+2x_4).$$

a) Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.
b) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori

$$v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (1,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Esercizio 9.6. *[8.35]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$T(x,y,z) = (x+y,\ 2x-y-z,\ 2y+z)$$

e sia $\mathcal{B} = ((1,2,-4),\ (0,1,1),\ (1,0,-7))$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.
b) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$.
c) Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$.
d) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

hhh

Esercizio 9.7. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (2,0,0)\}$$

una base di $\mathbf{R}^3$ *e sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *così definito:*

$$T(v_1) = (3,1,2), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (6,4,6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di* T*.*
c) *Si stabilisca per quali valori di* k *il vettore* $v_k = (k+1, 0, k)$ *appartiene all'Immagine di* T*.*

Esercizio 9.8. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,1,2)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$*.*
b) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$*.*

Esercizio 9.9. *[9.1]* Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.