CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 7.1. *[7.1]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.

Esercizio 7.2. *[7.2]* Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici $M_{2\times 2}$ avalori in $\mathbf{R}$ non è lineare.

Esercizio 7.3. *[7.3]* Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Esercizio 7.4. *[7.4]* Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,4) = (5,0), \qquad T(0,1) = (1,1)$$

Esercizio 7.5. *[7.5]* Determinare una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Esercizio 7.6. *[v. 7.6]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.

a) Verificare che T è lineare.
b) Determinare Nucleo e Immagine di T.
d) Determinare $T(1,2)$.

Esercizio 7.7. *[v. 7.7]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1,2,1)$, $T(e_2) = (1,0,-1)$.

a) Esplicitare $T(x,y)$.
c) Stabilire se $(3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 7.8. *[v 7.11]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2)$$

a) Trovare una base del nucleo $\mathrm{N}(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.
b) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
c) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?

Esercizio 7.9. *[v 7.12]* Sia $T :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.
b) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3,3,1,0)$ appartiene all'immagine di T.