CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FOGLIO DI ESERCIZI 5– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 5.1. *[7.54]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?
b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.

Esercizio 5.2. *[7.55]* Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) Trovare una base di W.
b) Determinare le coordinate del vettore $v = (0, 1, 1, 1, -2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto a).

Esercizio 5.3. *[7.56]* Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k + 1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
b) Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.

Esercizio 5.4. *[7.57]* Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1,\ x - 2y + z = 0,\ -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
b) Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.

Esercizio 5.5. *[7.58]* Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$

$$S = \left\{ x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0 \right\}.$$

a) Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?
b) Per i valori determinati al punto a) esplicitare S.

Esercizio 5.6. *[7.70]* Sia dato l'insieme

$$V = \{ p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \}$$

a) Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.
b) Determinare una base di V.

Esercizio 5.7. *[7.71]* Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) Verificare che l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Esprimere $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 5.8. *[7.74]* Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.

Esercizio 5.9. *[7.75]* Si considerino i polinomi a coefficienti reali

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) Stabilire per quali valori di k i tre polinomi sono linearmente dipendenti.
b) Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti esprimere un polinomio come combinazione lineare degli altri.

Esercizio 5.10. *[7.86]*

a) Mostrare che l'insieme
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$
è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

b) Determinare una base di W.

Esercizio 5.11. *[7.88]* Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:
$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) Mostrare che S è un sottospazio di V.

b) Calcolare la dimensione e una base di S.

Esercizio 5.12. *[7.89]* Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$
e sia $S = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA = 0\}$. Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 5.13. *[5.9]*

a) Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbf{R}^5$ sono linearmente dipendenti:
$$v_1 = (0, 1, -1, 0, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 1, 0, k), \qquad v_3 = (-1, 2, -3, 0, 0).$$

b) Per i valori di k determinati in *a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.