CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 4.1. *[6.4]* Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Esercizio 4.2. *[6.7]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
b) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.

Esercizio 4.3. *[6.9]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.
b) Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

Esercizio 4.4. *[6.6]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.
b) Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.

Esercizio 4.5. *[6.11]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.
b) Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.

Esercizio 4.6. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali* $\mathrm{null(A)} = \mathrm{null(B)} = 0$.
b) *Sia $C = AB$. Stabilire se il sistema lineare $Cx = 0$ ha soluzione unica quando $k = 0$.*

Esercizio 4.7. *[7.14]* Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - (k+1)x_2 = k \\ 2x_1 - 2x_2 = 2k \\ (k+2)x_1 + (k-2)x_2 = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile.
b) Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.

Esercizio 4.8. *[7.16]* Al variare del parametro reale k, si risolva il sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 - 2kx_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.9. *[7.17]* Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

a) Si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzione.
b) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali il sistema ha soluzione unica.

Esercizio 4.10. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$*.*

Esercizio 4.11. *[v. 7.62]* Sia A la matrice reale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.
b) Calcolare null(A) e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.

Esercizio 4.12. *[v. 7.93]* Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca per quali valori di k la matrice D è combinazione lineare di A, B e C. In tali casi si esprima D come combinazione lineare di A, B e C.

Esercizio 4.13. *[7.22]* Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0, k^2+2, 3), \qquad v_4 \equiv (1, k+3, k^2+2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 al variare del parametro k.