CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

DETERMINANTE, INVERSA E RANGO DI UNA MATRICE– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Una matrice (quadrata) A è invertibile se esiste una matrice, indicata con A^{-1}, tale che $AA^{-1} = I$.
Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$, ovvero che $\mathrm{rg}(A)$ sia massimo.

Per calcolare l'inversa di una matrice utilizzeremo due metodi:

- Si affianca alla matrice A la matrice identica e si riduce A a gradini in forma normale (cioè con tutti 1 sulla diagonale e 0 altrove). La matrice in cui è stata trasformata la matrice identica è l'inversa A^{-1}.
- Si utilizzano le formule:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, [A'_{ij}]^T$$

dove

$$\begin{aligned} A'_{ij} = &\text{ complemento algebrico di } a_{ij} \\ &= (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{matrice ottenuta da } A \text{ eliminando la riga } i \\ &\text{e la colonna } j) \end{aligned}$$

Il calcolo dei detreminanti può essere utilizzato per determinare il rango di una matrice, infatti:
il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di A con determinante non nullo.

Talvolta per calcolare il rango di una matrice può essere utile utilizzare un metodo misto di riduzione e di calcolo dei determinanti. Infatti, sia A una matrice e A' la matrice ottenuta da A con qualche passo di riduzione a gradini. Allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$. In particolare se A è quadrata $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(A') = 0$.
