

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 11- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 11.1 (10.6). *Determinare il valore del parametro $k \in \mathbf{R}$ tale che i vettori*

$$v = (1, 3, 7, -1), \quad w = (3, 5, 1, k)$$

siano ortogonali.

SOLUZIONE:

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero.

$$(v, w) = 3 + 15 + 7 - k = 25 - k \Rightarrow (v, w) = 0 \text{ se } k = 25$$

Quindi v e w sono ortogonali se $k = 25$

□

Esercizio 11.2 (10.9). *Siano $u = (4, 2, -2)$ e $v = (3, -3, 2)$ vettori di \mathbf{R}^3 .*

- a) *Calcolare le lunghezze di u e di v (rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbf{R}^3).*
- b) *Trovare tutti i vettori w di lunghezza 1 ortogonali a u e a v .*

SOLUZIONE:

a) Ricordiamo che $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, quindi:

$$\|u\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{22}$$

b) Si $w = (x, y, z)$ il generico vettore di \mathbf{R}^3 e imponiamo la condizione che sia ortogonale a u e a v , ovvero $(u, w) = (v, w) = 0$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema considerando la matrice associata

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 3 & -3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 7 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 7x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 7t \\ z = 2t + 7t = 9t \end{cases}$$

Quindi il generico vettore w ortogonale a u e v è del tipo

$$(t, 7t, 9t)$$

Imponiamo ora la condizione che w abbia norma 1:

$$\sqrt{t^2 + (7t)^2 + (9t)^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{131t^2} = 1 \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{131}}$$

Quindi abbiamo due possibili scelte per w :

$$w = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{131}}, \frac{7}{\sqrt{131}}, \frac{9}{\sqrt{131}} \right)$$

□

Esercizio 11.3 (10.7). *Siano assegnati i seguenti vettori di \mathbf{R}^4 :*

$$v = (2, -1, 0, 1), \quad w = (-1, 2, 0, 2)$$

- a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
- b) *Si determini la proiezione ortogonale di v su w .*
- c) *Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w .*

SOLUZIONE:

a) Se indichiamo con ϑ l'angolo (convesso) tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Poiché

$$(v, w) = -2 - 2 + 2 = -2, \quad \|v\| = \sqrt{6}, \quad \|w\| = \sqrt{9} = 3,$$

otteniamo

$$\cos(\vartheta) = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot 3} = -\frac{2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

e

$$\vartheta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right), \quad \text{con } 0 \leq \vartheta < \pi$$

b) La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w .

Sappiamo già che $(v, w) = -2$, inoltre $(w, w) = \|w\|^2 = 3^2 = 9$, quindi

$$pr_w(v) = \frac{-2}{9} \cdot w = \left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0, -\frac{4}{9}\right)$$

c) Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w (è comunque immediato verificarlo), quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} v_1 &= pr_w(v) && \text{multiplo di } w \\ v_2 &= v - pr_w(v) && \text{ortogonale a } w \\ v_1 + v_2 &= v \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0, -\frac{4}{9}\right) \\ v_2 &= \left(\frac{16}{9}, -\frac{5}{9}, 0, \frac{13}{9}\right) \end{aligned}$$

□

Esercizio 11.4 (10.8). *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di \mathbf{R}^3*

$$v = (3, 4, -2), \quad w = (2, 1, -1)$$

SOLUZIONE:

- La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w .

$$\begin{aligned} (v, w) &= 12 \\ (w, w) &= 6 \end{aligned}$$

quindi

$$pr_w(v) = \frac{12}{6} \cdot w = (4, 2, -2)$$

- Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w , quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} v_1 &= pr_w(v) && \text{multiplo di } w \\ v_2 &= v - pr_w(v) && \text{ortogonale a } w \\ v_1 + v_2 &= v \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}v_1 &= (4, 2, -2) \\v_2 &= (-1, 2, 0)\end{aligned}$$

□

Esercizio 11.5 (10.11). *Data la base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, 1)\}$$

di \mathbf{R}^3 , si determini una base ortonormale di \mathbf{R}^3 utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da \mathcal{B} .

SOLUZIONE:

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base \mathcal{B} .

Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}w_1 &= v_1 = (-1, 0, 1) \\w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0, 1, 0) - 0 \cdot w_1 = (0, 1, 0) \\w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\&= (1, 0, 1) - 0 \cdot w_1 - 0 \cdot w_2 = (1, 0, 1)\end{aligned}$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i , ma di norma 1:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\u_2 &= w_2 = (0, 1, 0) \\u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che v_1 , v_2 e v_3 sono già ortogonali, quindi era sufficiente normalizzarli per ottenere a partire da essi una base ortonormale.

□

Esercizio 11.6 (10.12). *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

SOLUZIONE:

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base \mathcal{B} . Per facilitare i conti scambiamo innanzitutto l'ordine di v_1, v_2 e v_3 in \mathcal{B} (cambiando i nomi per evitare confusioni):

$$\mathcal{B} = \{v'_1 = (0, 0, 1), v'_2 = (0, 1, 1), v'_3 = (1, 1, 1)\}$$

Come nell'esercizio precedente costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}w_1 &= v'_1 = (0, 0, 1) \\w_2 &= v'_2 - pr_{w_1}(v'_2) = v'_2 - \frac{(v'_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{1} \cdot (0, 0, 1) = (0, 1, 0) \\w_3 &= v'_3 - pr_{w_1}(v'_3) - pr_{w_2}(v'_3) = v'_3 - \frac{(v'_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v'_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\&= (1, 1, 1) - \frac{1}{1} \cdot (0, 0, 1) - \frac{1}{1} \cdot (0, 1, 0) = (1, 0, 0)\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso i vettori ottenuti hanno già norma 1, quindi

$$u_1 = w_1 = (0, 0, 1), \quad u_2 = w_2 = (0, 1, 0), \quad u_3 = w_3 = (1, 0, 0)$$

Infine

$$\mathcal{B}' = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

□

Esercizio 11.7 (10.15). *Si considerino i vettori di \mathbf{R}^3*

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

- Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2 .
- Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2 .
- Trovare una base ortonormale del sottospazio di \mathbf{R}^3 generato dai vettori v_1 e v_2 .

SOLUZIONE:

a)

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

b)

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{4}{3} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

- c) Sia $\{u_1, u_2\}$ la base ortonormale cercata. La cosa più semplice per sfruttare i conti già fatti è considerare il seguente vettore u_1 , parallelo a v_2 e di norma 1:

$$u_1 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Inoltre il seguente vettore w_2 è ortogonale a v_2 , e quindi a u_1 :

$$w_2 = v_1 - (v_1, u_1) \cdot u_1 = v_1 - pr_{v_2}(v_1) = (1, 2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Notiamo che w_2 è parallelo a $(-1, 2, -1)$, quindi al seguente vettore di norma 1:

$$u_2 = \frac{(-1, 2, -1)}{\|(-1, 2, -1)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Infine la base ortogonale cercata è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.8 (10.16). *Sia U il sottospazio di \mathbf{R}^3 costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di \mathbf{R}^3 .*

SOLUZIONE:

Gli elementi di U sono i vettori di \mathbf{R}^3 tali che $2x_1 + x_2 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$U = \langle (1, -2, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Poichè i due generatori sono tra loro ortogonali, per ottenere una base ortonormale di U è sufficiente prenderli di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), (0, 0, 1) \right\}$$

□

Esercizio 11.9 (10.21). Sia $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la funzione lineare tale che

$$T(1, -2, 1) = (2, 1), \quad T(1, 0, 0) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$

- a) Che dimensione ha l'immagine di T ?
 b) Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbf{R}^3) del nucleo di T .

SOLUZIONE:

Per risolvere l'esercizio possiamo procedere in due modi:

- (1) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{ (1, -2, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$$

di \mathbf{R}^3 e alla base canonica \mathcal{C} di \mathbf{R}^2 , tenendo poi conto che i vettori ottenuti nello spazio di partenza \mathbf{R}^3 (in particolare il Nucleo) saranno espressi rispetto alla base \mathcal{B} .

- (2) Ricavare l'azione di T sugli elementi della base canonica di \mathbf{R}^3 e determinare quindi la matrice $B = M(T)$ associata a T rispetto alle basi canoniche.

Consideriamo entrambi i metodi.

- (1) Con il primo metodo consideriamo la matrice A associata a T rispetto alla base \mathcal{B} di \mathbf{R}^3 e \mathcal{C} di \mathbf{R}^2 :

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di A . Poichè A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

di determinante $2 \neq 0$, la matrice A ha rango 2, quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

- b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2(-2t) - t = -5t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $N(T)$ è generato dal vettore $(-2, 1, -5)_{\mathcal{B}}$, espresso però rispetto alla base \mathcal{B} . Rispetto alla base canonica tale vettore corrisponde al vettore

$$-2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 5 \cdot v_3 = (-1, -1, -2)$$

Infine

$$N(T) = \langle (-1, -1, -2) \rangle$$

Poichè il nucleo ha dimensione uno per determinarne una base ortonormale è sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

- (2) Con il secondo metodo ricaviamo invece la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di \mathbf{R}^3 e \mathbf{R}^2 , calcolando le immagini di e_1, e_2, e_3 . Poichè conosciamo già $T(e_1) = (-1, 2)$ e $T(e_2) = (-1, 0)$, dobbiamo solo ricavare $T(e_3)$. Sfruttando la linearità di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= T(1, -2, 1) - T(1, 0, 0) + 2T(0, 1, 0) \\ &= (2, 1) - (-1, 2) + 2(-1, 0) = (1, -1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice B associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II + 2I \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di B , quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a B

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$N(T) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

Notiamo che in questo caso il generatore è già espresso rispetto alla base canonica, è quindi sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 11.10 (11.1). [Esercizio 15] cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] Calcolare una base ortonormale di \mathbf{R}^3 formata da autovettori per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice A calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1 - \lambda)(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2 \cdot 2(-1 - \lambda) = (-1 - \lambda)[(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4] \\ &= (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono i valori di λ per cui $p_A(\lambda) = 0$, quindi

$$\lambda_1 = -1 \quad (\text{doppio}), \quad \lambda_2 = 3$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = -1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A + I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow 2x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(-1) = \langle (-1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Poichè dalla teoria sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, ci aspettavamo che l'autovalore $\lambda = -1$ avesse molteplicità geometrica 2.

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(3) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (-1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo A una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Inoltre, in questo caso,

anche i due autovettori relativi allo stesso autovalore $\lambda = -1$ risultano ortogonali: $(v_1, v_2) = 0$. Per determinare la base ortonormale richiesta è quindi sufficiente normalizzare i tre vettori v_1 , v_2 e v_3 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0, 0, 1) \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è } \mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

Ripetiamo ora l'esercizio con la matrice B . Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice B calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= (1 - \lambda)[(-2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1] - 3 \cdot 3(1 - \lambda) = (1 - \lambda)[(-2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 - 9] \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12) \end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono i valori di λ per cui $p_B(\lambda) = 0$, quindi

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -4$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = 1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ &\Rightarrow E(1) = \langle (1, 0, 3) \rangle \end{aligned}$$

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B - 3I$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] &\Rightarrow 2II + 3I \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow E(3) = \langle (-3, -2, 1) \rangle \end{aligned}$$

- $\lambda = -4$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B + 4I$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] &\Rightarrow 5II + -3I \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow E(-4) = \langle (-3, 5, 1) \rangle \end{aligned}$$

Siano

$$v_1 = (1, 0, 3), \quad v_2 = (-3, -2, 1), \quad v_3 = (-3, 5, 1)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo B una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Per determinare la base

ortonormale richiesta si tratta quindi di normalizzare i tre vettori v_1 , v_2 e v_3 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right) \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}} \right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è } \mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

□

Esercizio 11.11 (11.2). Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale $P^T A P$ sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Poichè entrambe le matrici A sono simmetriche, sappiamo dalla teoria che sono sicuramente diagonalizzabili. Si tratta di

- (1) Determinare gli autovettori di A ,
- (2) Determinare una base ortonormale a partire dagli autovettori (linearmente indipendenti) di A ,
- (3) Scrivere la matrice P che ha per colonne gli elementi della base trovata.

La matrice P così determinata è diagonalizzante e ortogonale.

Consideriamo prima la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- (1) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 \Rightarrow$ autovalori: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$

- $\lambda = 2$. Consideriamo $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(2) = \langle (2, 1) \rangle$$

- $\lambda = -3$. Consideriamo $A + 3I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-3) = \langle (1, -2) \rangle$$

- (2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{aligned} v_1 &= (2, 1), & v_2 &= (1, -2) & \Rightarrow \\ u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), & u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

- (3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \Rightarrow$ autovalori: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$

- $\lambda = 1$. Consideriamo $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

- $\lambda = 3$. Consideriamo $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2III + I \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(3) = \langle (-1, 1, -2) \rangle$$

- $\lambda = 0$. Consideriamo $A - 0I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(0) = \langle (-1, 1, 1) \rangle$$

- (2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0) & u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ v_2 &= (-1, 1, -2) & u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \\ v_3 &= (-1, 1, 1) & u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

- (3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 11.12 (11.3). Sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 con matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

- Stabilire se l'endomorfismo T è diagonalizzabile.
- Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbf{R}^3).
- Trovare una base ortonormale di \mathbf{R}^3 formata da autovettori di T .

SOLUZIONE:

- L'endomorfismo T è sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrico.
- Calcoliamo gli autovalori di T :

$$p_A(\lambda) = (4 - \lambda)[(5 - \lambda)^2 - 1] = (4 - \lambda)^2(6 - \lambda)$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{doppio}$$

$$\lambda_2 = 6$$

Calcoliamo ora gli autospazi.

Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \text{III} + \text{II} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y - z = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} &\Rightarrow E(4) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Notiamo che, anche senza avere osservato che T è simmetrico, a questo punto possiamo concludere che T è diagonalizzabile in quanto la molteplicità geometrica del suo unico autovalore doppio è 2.

Inoltre i due vettori presi come generatori sono tra loro ortogonali, è perciò sufficiente normalizzarli per ottenere una base ortonormale di $E(4)$:

$$\mathcal{B}(E(4)) = \left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a $A - 6I$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \text{III} - \text{II} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} &\Rightarrow E(6) = \langle (0, -1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Una base ortonormale di $E(6)$ è:

$$\mathcal{B}(E(6)) = \left\{ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

c) L'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

è una base ortonormale di \mathbf{R}^3 formata da autovettori di T .

□

Esercizio 11.13 (11.5). *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di \mathbf{R}^3 costituita da autovettori di A .

SOLUZIONE:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (6 - \lambda)(5 - \lambda)(9 - \lambda) - 2 \cdot 2(5 - \lambda) = (5 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4) \\ &= -(\lambda - 5)^2(\lambda - 10) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda = 10, \quad \lambda = 5 \quad (\text{doppio})$$

Calcoliamo i due autospazi.

$E(10)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 10I$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{1/2I} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 1/2I} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ \Rightarrow E(10) &= \langle (1, 0, -2) \rangle \end{aligned}$$

$E(5)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 5I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III + 2I \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow E(5) = \langle (2, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$$

Una base di \mathbf{R}^3 formata da autovettori di T è data dall'insieme

$$\{ (1, 0, -2), (2, 0, 1), (0, 1, 0) \}.$$

Notiamo che tali vettori sono già tra loro ortogonali, è quindi sufficiente normalizzarli. Una base ortonormale è quindi data dall'insieme

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), (0, 1, 0) \right\}.$$

□

Esercizio 11.14 (11.9). Si consideri il seguente endomorfismo di \mathbf{R}^3

$$T(x, y, z) = (ax, bx + y + z, y + z)$$

con a e b parametri reali.

- Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in \mathbf{R} .
- Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di \mathbf{R}^3 formata da autovettori di T .

SOLUZIONE:

Determiniamo la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = a, 0, 2$.

- Se $a \neq 0, 2$, T ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.
Se $a = 0$, l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(0)$:

$$E(0) = N(A) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - III \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi

- Se $a = 0$ e $b = 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Analogamente se $a = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi

- Se $a = 2$ e $b = 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $a = 2$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Infine T è diagonalizzabile se $a \neq 0, 2$ per ogni valore di b , oppure se $a = 0$ o $a = 2$ e $b = 0$.

- Per $a = b = 0$ abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0, 1, -1), (1, 0, 0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per $a = b = 0$ otteniamo:

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 11.15 (11.13). Sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2 + \sqrt{3}x_3, \sqrt{3}x_2)$$

- Stabilire se T è invertibile.
- Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.
- Trovare una base ortonormale di \mathbf{R}^3 che diagonalizza T .

SOLUZIONE:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

- T è invertibile se è invertibile la matrice A , cioè se A ha determinante non nullo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

- La matrice associata a T rispetto alla base canonica (che è ortonormale) è simmetrica: $A^T = A$, quindi T è un endomorfismo simmetrico.

- Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda) \cdot [(2 - \lambda)(-\lambda) - 3] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2, -1, 3$.

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

$$E(-1) = N(A + I) : \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{3}III - II \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{3}}t = -\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow E(-1) = \langle (0, 1, -\sqrt{3}) \rangle$$

$$E(3) = N(A - 3I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow III + \sqrt{3}II \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (0, \sqrt{3}, 1) \rangle$$

Essendo tre autospazi distinti i tre autovalori generatori trovati sono tra loro ortogonali. Per ottenere la base ortonormale cercata basta quindi prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

□