CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FOGLIO DI ESERCIZI # 10– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 10.1 (Esercizio 9.7)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ = (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \ \Rightarrow \ (2-\lambda) = 0 \text{ oppure } (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \quad \text{doppio} \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, 0, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 3$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(3) = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione uno).

Consideriamo ora la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned}
p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda)+6] - 1[-7(-\lambda-2)-6] - [-42+6(5-\lambda)] \\
&= (-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) - 7\lambda - 8 + 12 + 6\lambda \\
&= (-3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - \lambda + 4 = (\lambda-4)[(-3-\lambda)(\lambda+1)-1] \\
&= (\lambda-4)[-\lambda^2-4\lambda-4]
\end{aligned}$$

b) Gli autovalori di B sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}
&(\lambda-4)(-\lambda^2-4\lambda-4) = 0 \\
&\Rightarrow\ (\lambda-4) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2-4\lambda-4) = 0 \\
&\Rightarrow\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -2
\end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di B sono

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = 4 \\
&\lambda_2 = -2 \quad \text{doppio}
\end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ 1/6III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x, y, z) = (0, t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 7 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 7I \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x, y, z) = (t, t, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione uno). Infatti abbiamo determinato due soli autovettori linearmente indipendenti.

Consideriamo ora la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$\begin{aligned}
p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda)+18] + 3[3(4-\lambda)-18] + 3[-18-6(-5-\lambda)] \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\
&= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) + 9\lambda + 18 = (\lambda+2)[(1-\lambda)(\lambda-1)+9] \\
&= (\lambda+2)[-\lambda^2+2\lambda+8]
\end{aligned}$$

b) Gli autovalori di C sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2)(-\lambda^2+2\lambda+8) = 0 \\
&\Rightarrow\ (\lambda+2) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2+2\lambda+8) = 0 \\
&\Rightarrow\ \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4
\end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di C sono

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = -2 \quad \text{doppio} \\
&\lambda_2 = 4
\end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x,y,z) = (t-s,t,s) = (t,t,0) + (-s,0,s) \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1,1,0),\ (-1,0,1) \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che C è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -12 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x,y,z) = (t,t,2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1,1,2) \rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uno, e l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico) e ha molteplicità geometrica due (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione due).

□

Esercizio 10.2. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.*

b) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

SOLUZIONE:
Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

a) Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:
$$T(v) = \lambda v \Rightarrow A \cdot v = \lambda v \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+y \\ 3y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)z = \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & | & 0 \end{bmatrix}$$
Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:
$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 3, 2$$
Consideriamo i tre casi
– Se $\lambda = 1$ otteniamo il sistema omogeneo
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 0, 0)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 1:
$$T(t, 0, 0) = A \cdot (t, 0, 0) = (t, 0, 0).$$
– Se $\lambda = 3$ otteniamo il sistema omogeneo
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$
Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 2t, 0)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 3:
$$T(t, 2t, 0) = A \cdot (t, 2t, 0) = (3t, 6t, 0) = 3 \cdot (t, 2t, 0).$$
– Se $\lambda = 2$ otteniamo il sistema omogeneo
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$
Quindi tutti i vettori del tipo $(0, 0, t)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 2:
$$T(0, 0, t) = A \cdot (0, 0, t) = (0, 0, 2t) = 2 \cdot (0, 0, t).$$

b) T è diagonalizzabile rispetto a una certa base ha associata una matrice diagonale, ovvero se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T. Prendiamo un autovettore relativo a ciascun autovalore:
$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 2, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$
e stabiliamo se sono linearmente indipendenti calcolando il determinante della matrice associata ai tre vettori:
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, dunque T è diagonalizzabile.

c) Abbiamo già determinato la base al punto precedente. Inoltre

$$\begin{array}{l} T(v_1) = v_1 \ \Rightarrow \ T(v_1) = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) = 3v_2 \ \Rightarrow \ T(v_2) = (0,3,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) = 2v_3 \ \Rightarrow \ T(v_3) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} \end{array} \Rightarrow \ M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 10.3 (Esercizio 9.2)**.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di A.*
b) *Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.*
c) *Stabilire se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A, e in caso positivo determinarla.*

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = -\lambda[-\lambda(1-\lambda)] - 6[1-\lambda-1] = \lambda^2(1-\lambda) + 6\lambda = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 6)$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_3 = 3 \quad \text{singolo} \end{aligned}$$

b) Possiamo già rispondere alla seconda domanda in quanto gli autovalori sono tutti singoli, quindi la matrice è sicuramente diagonalizzabile.

a) Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(0) = \langle (1,0,-1) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(-2) = \langle (-3,1,1) \rangle$$

Infine calcoliamo l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/3I \\ \Rightarrow II + 1/3I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(3) = \langle (2, 1, 1) \rangle$$

c) Poichè A è diagonalizzabile esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \{(1, 0, -1),\ (-3, 1, 1),\ (2, 1, 1)\ \}$$

$\square$

Esercizio 10.4 (Esercizio 9.2)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Si determinino gli autovalori di T.*
b) *Si determinino gli autovettori e gli autospazi di T.*
c) *Si stabilisca se T è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice P diagonalizzante.*

Soluzione:

Determiniamo innanzitutto la matrice A associata a T rispetto alla base canonica, ovvero la matrice che ha per colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Per calcolare gli autovalori di T (cioè di A) determiniamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = &\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] \\ = &(1-\lambda)(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

Risolvendo $p_A(\lambda) = 0$ troviamo che gli autovalori di A sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Avendo 3 autovalori distinti la matrice A, e quindi T, è sicuramente diagonalizzabile.

b) Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (0, 3, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(2) = \langle (0, 3, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 1/3I \\ \\ III - 1/3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (0, -1, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(-2) = \langle (0, -1, 1) \rangle$$

Consideriamo infine l'autovalore $\lambda = 1$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (-1, 1, 0) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(1) = \langle (-1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice P cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(0, 3, 1),\ (0, -1, 1),\ (-1, 1, 0)\}$$

Di conseguenza:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando $P^{-1}AP$ otteniamo la matrice diagonale D che ha gli autovalori di A sulla diagonale:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 10.5 (Esercizio 9.13)**.** [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice A e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(k - \lambda)(2 - \lambda)$$

Gli autovalori di A sono quindi

$$\lambda = 1$$
$$\lambda = 2$$
$$\lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 2$, allora A ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.

- Se $k = 1$ la matrice A diventa
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda = 2$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, 0, 0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e A non è diagonalizzabile.
- Se $k = 2$ la matrice A diventa
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1$$
$$\lambda = 2 \quad \text{doppio}$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 2$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle\ (1, 1, 0),\ (0, 0, 1)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1), e A è diagonalizzabile.

Consideriamo ora la matrice B e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_B(\lambda) = (1 - \lambda)^2(k - \lambda)$$
Gli autovalori di B sono quindi
$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}$$
$$\lambda = k$$
Poichè B ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, 0, 0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica almeno 2, ma molteplicità geometrica 1, e B non è diagonalizzabile.

Consideriamo la matrice C e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_C(\lambda) = (3 - \lambda)(k - \lambda)(1 - \lambda)$$

Gli autovalori di A sono

$$\lambda = 1$$
$$\lambda = 3$$
$$\lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 3$, allora C ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice C diventa

  $$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  ed ha come autovalori

  $$\lambda = 1 \quad \text{doppio}$$
  $$\lambda = 3$$

  Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato a $C - I$:

  $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle\ (1, -2, 0)\ \rangle$$

  Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.
- Se $k = 3$ la matrice C diventa

  $$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  ed ha come autovalori

  $$\lambda = 1$$
  $$\lambda = 3 \quad \text{doppio}$$

  Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 3$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $C - 3I$:

  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle\ (1, 0, 0)\ \rangle$$

  Quindi $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.

Consideriamo infine la matrice D e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_D(\lambda) = (1 - \lambda)^2(k - \lambda)$$

Gli autovalori di D sono quindi

$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}$$
$$\lambda = k$$

Poichè D ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $D - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle\ (1, 0, 0),\ (0, 0, 1)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità geometrica 2.

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k \neq 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e l'autovalore $\lambda = k \neq 1$ ha molteplicità 1) quindi D è diagonalizzabile.

- Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 3, ma molteplicità geometrica 2 quindi D non è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 10.6 (Esercizio 9.16)**.** *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = (\ (1,1,0),\ (0,3,0),\ (0,1,1)\ )$$

a) *Si determinino gli autovalori di* T*.*
b) *Si determinino gli autovettori e gli autospazi di* T*.*
c) *Si stabilisca se* T *è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4)$$

e gli autovalori di T sono

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\lambda_3 = -2$$

b) Calcoliamo ora gli autovettori.
   – Consideriamo $\lambda = 1$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 1$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (-1,1,0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(-1,1,0)_{\mathcal{B}} = -1 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (0,3,0) + 0 \cdot (0,1,1) = (-1,2,0)$$

e

$$E(1) = \langle\ (-1,2,0)\ \rangle$$

   – Consideriamo $\lambda = 2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (0,3,1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0,3,1)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot (1,1,0) + 3 \cdot (0,3,0) + 1 \cdot (0,1,1) = (0,10,1)$$

e

$$E(2) = \langle\ (0,10,1)\ \rangle$$

– Consideriamo $\lambda = -2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ 1/3II \\ III - 1/3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -2$ sono del tipo

$$(x, y, z) = (0, -1, 1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0, -1, 1)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot (1, 1, 0) + -1 \cdot (0, 3, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) = (0, -2, 1)$$

e

$$E(-2) = \langle\ (0, -2, 1)\ \rangle$$

c) La matrice A, e quindi l'applicazione T, è diagonalizzabile perchè ha tre autovalori distinti.

□

Esercizio 10.7 (Esercizio 9.28)**.** *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori della matrice A.*
b) *Stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice data è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla prima colonna:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& (3-k-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(3-k-\lambda) - k] + k(3-k-\lambda) \\ &= (3-k-\lambda)(2-\lambda)(3-k-\lambda) - k(3-k-\lambda) + k(3-k-\lambda) \\ &= (3-k-\lambda)(2-\lambda)(3-k-\lambda) = (3-k-\lambda)^2(2-\lambda) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 2 \\ &\lambda_2 = 3-k \quad \text{almeno doppio} \end{aligned}$$

Notiamo che possiamo solo dire che λ_2 è almeno doppio, in quanto se $k = 1$ avremmo un unico autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, triplo.

b) Per stabilire se la matrice è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(-k+3)$, che deve essere almeno 2 (la dimensione deve essere 3 nel caso $k = 1$ quando si ha un unico autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ triplo).

Calcoliamo quindi l'autospazio $E(3-k)$ relativo all'autovalore λ_2 risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - (3-k)I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k & k-1 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ -I \\ III + I \end{matrix} \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} kx + (k-1)y + kz = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx + kz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema dobbiamo distinguere due casi

– Se $k = 0$, allora il sistema si riduce alla sola equazione $y = 0$, quindi ha soluzione

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases}$$

e $E(-k+3) = E(3) = \langle (1,0,0),\ (0,0,1)\rangle$. In particolare $E(-k+3)$ ha dimensione 2 uguale alla molteplicità algebrica di λ_2 (Notiamo che per $k=0$, $\lambda_1 = 2$ è singolo e $\lambda_2 = 3$ è doppio). Di conseguenza se $k = 0$ la matrice è diagonalizzabile.

– Se $k \neq 0$ possiamo dividere la prima equazione per k ottenendo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

Quindi in questo caso $E(-k+3) = \langle (1,0,-1)\rangle$. In particolare $E(-k+3)$ ha dimensione 1 minore della molteplicità algebrica di λ_2. Di conseguenza se $k \neq 0$ la matrice non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 10.8 (Esercizio 9.24)**.** *Siano A e B le matrici reali*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per cui A e B sono simili.*

Soluzione:

Due matrici diagonalizzabili sono simili se sono simili alla stessa matrice diagonale, ovvero se hanno gli stessi autovalori. Inoltre se una delle due matrici è diagonalizzabile mentre l'altra non lo è, allora le due matrici non sono simili. Studiamo quindi la diagonalizzabilità di A e B.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$
$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori $\lambda_1 = 1$, doppio, e $\lambda_2 = 3$.

Per stabilire se A è diagonalizzabile calcoliamo la dimensione del suo autospazio $E_A(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow E_A(1) = \langle (1,0,0),\ (0,1,0)\rangle$$

e la matrice A è diagonalizzabile.

A questo punto possiamo affermare che A e B sono simili se e solo se anche B è diagonalizzabile. Calcoliamo quindi la dimensione del suo autospazio $E_B(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 5 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k-1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k-1)y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E_B(1)$ ha dimensione 2 se e solo se $k = 1$.

Infine A e B sono simili solamente se $k = 1$, quando sono entrambe simili alla matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 10.9. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, kx_3 + x_4, x_4).$$

a) Calcolare gli autovalori e gli autovettori di T.
b) Stabilire per quali valori reali di k l'endomorfismo T diagonalizzabile.

Soluzione:

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ e il suo polinomio carattestico è

$$det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(k-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

Se ne deduce che gli autovalori di T sono 1, 3, k ,-1, determiniamone i relativi autospazi.

- $E(1)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ (k-1)x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow$$

  Quindi $\forall k \in \mathbf{R}$, $E(1) = \{(0,0,t,(1-k)t) \mid t \in \mathbf{R}\}$

- $E(-1)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ (k+1)x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

  In questo caso ci sono due possibilità:
  - se $k \neq -1$ la seconda equazione del sistema diviene $x_3 = 0$ e quindi $E(-1) = \{(-t,t,0,0) \mid t \in \mathbf{R}\}$
  - se $k = -1$ la seconda equazione del sistema è indeterminata e quindi ponendo $x_3 = s$ si ha $E(-1) = \{(-t,t,s,0) \mid t,s \in \mathbf{R}\}$.

- $E(3)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ (k-3)x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

  In questo caso ci sono due possibilità:
  - se $k \neq 3$ la seconda equazione del sistema diviene $x_3 = 0$ e quindi $E(3) = \{(t,t,0,0) \mid t \in \mathbf{R}\}$
  - se $k = 3$ la seconda equazione del sistema è indeterminata e quindi ponendo $x_3 = s$ si ha $E(3) = \{(t,t,s,0) \mid t,s \in \mathbf{R}\}$.

- $E(k)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1-k & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-k & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4-(1-k)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{bmatrix} \to \begin{cases} (1-k)x_1 + 2x_2 = 0 \\ (k+1)(k-3)x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

  per $k \neq -1, 3$ (gli altri sono già stati analizzati e comunque si possono ricavare dal medesimo sistema). Allora $E(k) = \{(0,0,t,0) \mid t \in \mathbf{R}\}$, se $k \neq -1, 3$.

b) Dalla parte precedente si conclude che la matrice è diagonalizzabile $\forall k \neq 1$, infatti per $k = 1$ la molteplicità algebrica di $\lambda = 1$ è 2 mentre quella geometrica è 1. In tutti gli altri casi le molteplicità algebrica e geometrica di ciascun autovalore coincidono.

□

Esercizio 10.10. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori e gli autovettori di A.

Soluzione:

La matrice A è simmetrica e quindi sicuramente diagonalizzabile.

a) Il polinomio caratteristico di A è $det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1)$, gli autospazi corrispondenti sono i seguenti:

- $E(1) = \langle (0,0,1) \rangle$
- $E(-1) = \langle (-1,1,0) \rangle$
- $E(3) = \langle (1,1,0) \rangle$

$\square$