

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 9- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 9.1 (v.8.37). Sia T la funzione lineare da \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^3 definita da

$$T(x, y, z) = (3x - 2y, x + y + z, 2x - 3y - z)$$

- a) Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.
 b) Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

SOLUZIONE:

- a) Riduciamo a gradini la matrice A associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3II - I \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} III + II \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1), T(e_2)\} = \{(3, 1, 2), (-2, 1, -3)\}$$

Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = -\frac{5}{3}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, -\frac{5}{3} \right) \right\}$$

- b) Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i tre vettori di \mathcal{B} . Dalla definizione di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(2, 1, 0) = (4, 3, 1), \\ T(v_2) &= T(1, 1, 0) = (1, 2, -1), \\ T(v_3) &= T(0, 1, 1) = (-2, 2, -4) \end{aligned}$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di \mathcal{B} , cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow 2II - I \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

Consideriamo ora il sistema associato alle prime 4 colonne:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y + 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$T(v_1) = (4, 3, 1) = 2v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (2, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla quinta:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$T(v_2) = (1, 2, -1) = -2v_1 + 5v_2 - 1v_3 = (-2, 5, -1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla sesta:

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ y + 2z = 6 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 14 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$T(v_3) = (-2, 2, -4) = -8v_1 + 14v_2 - 4v_3 = (-8, 14, -4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base \mathcal{B} è

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consisteva nell'utilizzare la matrice P di cambiamento di base:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

□

Esercizio 9.2 (8.40). Sia $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ due basi di \mathbf{R}^2 e \mathbf{R}^3 rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

SOLUZIONE:

La matrice A cercata ha per colonne le immagini attraverso T degli elementi di \mathcal{B} , espressi rispetto a \mathcal{B}' . Cominciamo a calcolare le immagini:

$$T(1, 0) = (2, 1, 0), \quad T(1, 1) = (2, 0, 2)$$

I vettori così ottenuti sono però espressi rispetto alla base canonica. Indichiamo con

$$u'_1 = (1, 1, 0), \quad u'_2 = (0, 1, 1), \quad u'_3 = (0, 0, 2)$$

gli elementi della base \mathcal{B}' . Esprimere $(2, 1, 0)$ e $(2, 0, 2)$ rispetto a \mathcal{B}' equivale a risolvere le due equazioni vettoriali: $xu'_1 + yu'_2 + zu'_3 = (2, 1, 0)$ e $xu'_1 + yu'_2 + zu'_3 = (2, 0, 2)$. Consideriamo quindi la matrice associata a tali sistemi, riducendola con le due colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$

Per risolvere l'equazione $xu'_1 + yu'_2 + zu'_3 = (2, 1, 0)$ consideriamo la prima colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1, 0) = (2, 1, 0) = 2u'_1 - u'_2 + \frac{1}{2}u'_3 = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Analogamente per risolvere l'equazione $xu'_1 + yu'_2 + zu'_3 = (2, 0, 2)$ consideriamo la seconda colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1, 1) = (2, 0, 2) = 2u'_1 - 2u'_2 + 2u'_3 = (2, -2, 2)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.3 (8.44). Sia $S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\{(1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 0, 3)\}$ di \mathbf{R}^3 .

- Si scriva la matrice associata a S rispetto alla base canonica.
- Determinare basi dell'immagine $\text{Im}(S)$ e del nucleo $N(S)$.

SOLUZIONE:

- Siano $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2)$, $v_3 = (0, 0, 3)$ e sia \mathcal{B} la base formata da essi.

Dalla matrice, che utilizza vettori espressi rispetto alla base \mathcal{B} sia nello spazio di arrivo che di partenza, si ricava che:

$$S(v_1) = S(1, 1, 1) = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (0, 0, 3)$$

$$S(v_2) = S(0, 2, 2) = (0, 0, 2)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 2v_3 = (0, 0, 6)$$

$$S(v_3) = S(0, 0, 3) = (0, 1, 3)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 1v_2 + 3v_3 = (0, 2, 11)$$

Per calcolare le immagini della base canonica, dobbiamo prima determinare le coordinate degli elementi e_i della base canonica rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, ovvero esprimere gli e_i come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 , ovvero risolvere le equazioni

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i \quad i = 1, 2, 3$$

In questo caso, data la semplicità dei calcoli non è necessario impostare le tre equazioni, infatti:

$$e_1 = v_1 - \frac{1}{2}v_2, \quad e_2 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{3}v_3, \quad e_3 = \frac{1}{3}v_3$$

Quindi per la linearità di S :

$$S(e_1) = S(v_1) - \frac{1}{2}S(v_2) = (0, 0, 3) - \frac{1}{2}(0, 0, 6) = (0, 0, 0)$$

$$S(e_2) = \frac{1}{2}S(v_2) - \frac{1}{3}S(v_3) = \frac{1}{2}(0, 0, 6) - \frac{1}{3}(0, 2, 11) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$S(e_3) = \frac{1}{3}S(v_3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

Infine la matrice associata a S rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

- Conviene utilizzare la matrice A in modo da ottenere vettori già espressi rispetto alla base canonica.

In questo caso non è necessario procedere con la riduzione a gradini. Infatti è evidente che la sottomatrice formata dalle ultime due colonne ha rango 2, quindi una base dell'immagine di S è quella formata da $S(e_2)$ e $S(e_3)$, oppure da un loro multiplo:

$$\mathcal{B}(\text{Im}(S)) = \{ (0, 2, 2), (0, 2, 11) \}$$

Dal teorema di nullità più rango sappiamo che il nucleo ha dimensione uno e avendo trovato che $S(e_1) = 0$, quindi e_1 appartiene al nucleo, possiamo concludere che una base del nucleo di S è

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{ (1, 0, 0) \}$$

□

Esercizio 9.4 (8.18). Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (2x, y, 0)$$

- Dato il vettore $w = (2, -1, 1)$, calcolare $T(w)$.
- Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
- Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A .
- Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali $\text{Im}(T)$ e $N(T)$.
- Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ è una base di \mathbf{R}^3 .

- (6) Determinare la matrice B associata a T rispetto alla base \mathcal{B} dello spazio di partenza e alla base canonica \mathcal{E} dello spazio di arrivo, cioè $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$.
- (7) Determinare le componenti del vettore $w = (2, -1, 1)$ rispetto alla base \mathcal{B} .
- (8) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B .

SOLUZIONE:

- (1) Per calcolare $T(w)$ basta applicare la definizione:

$$T(2, -1, 1) = (2 \cdot 2, -1, 0) = (4, -1, 0)$$

- (2) Per calcolare A dobbiamo calcolare l'immagine dei vettori della base canonica:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

La matrice A ha come colonne $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (3) Utilizzando la matrice A si ottiene

$$T(w) = A \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1).

- (4) L'immagine di T è generata dai vettori colonna di A :

$$\text{Im}(T) = \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3) \rangle = \langle (2, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$$

Dalla matrice A , già ridotta a gradini, notiamo che solamente $T(e_1)$ e $T(e_2)$ sono linearmente indipendenti, di conseguenza l'immagine è uno spazio vettoriale generato da due vettori:

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

Il nucleo di T è formato da quei vettori dello spazio di partenza \mathbf{R}^3 la cui immagine attraverso T è il vettore nullo:

$$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(v) = (0, 0, 0)\}$$

Il $N(T)$ è quindi formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A :

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$N(T) = \{(0, 0, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

$$\dim(N(T)) = 1$$

$$\mathcal{B}(N(T)) = \{(0, 0, 1)\}$$

- (5) Per verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ è una base di \mathbf{R}^3 calcoliamo il rango della matrice che ha per colonne i tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow III - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow III + II \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3, e l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di \mathbf{R}^3 .

- (6) Per determinare la matrice B associata a T rispetto alla base \mathcal{B} dello spazio di partenza e rispetto alla base \mathcal{E} dello spazio di arrivo, come al punto (2), calcoliamo l'immagine di v_1 , v_2 e v_3 attraverso T :

$$T(v_1) = T(1, 0, 1) = (2, 0, 0)$$

$$T(v_2) = T(0, 1, -1) = (0, 1, 0)$$

$$T(v_3) = T(1, 1, -1) = (2, 1, 0)$$

Notiamo che tali immagini (appartenenti allo spazio di arrivo) sono espresse come richiesto rispetto alla base canonica. La matrice B ha quindi come colonne $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$:

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (7) Per determinare le componenti (x, y, z) di w rispetto alla base \mathcal{B} dobbiamo esprimere w come combinazione lineare degli elementi di \mathcal{B} . Dobbiamo quindi risolvere l'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

Consideriamo la matrice associata:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow III - I \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ III + II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Come metodo alternativo possiamo calcolare la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione da \mathcal{B} a \mathcal{C} , ovvero la matrice che ha per colonne i vettori di \mathcal{B} espressi rispetto a \mathcal{C} :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per esprimere w rispetto a \mathcal{B} dobbiamo prima calcolare $P^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, la matrice di transizione da \mathcal{C} a \mathcal{B} :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$w_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot w^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

- (8) Avendo espresso w in termini della base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ possiamo ora calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B :

$$T(w) = B \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1) e del punto (3). □

Esercizio 9.5 (8.36). Sia $S : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4, 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

- a) Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S .

b) Sia \mathcal{E} la base canonica di \mathbf{R}^4 e sia \mathcal{B} la base di \mathbf{R}^3 costituita dai vettori

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S .

SOLUZIONE:

Determiniamo la matrice A associata a S calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} S(e_1) &= (3, 4, 1) \\ S(e_2) &= (0, -2, 0) \\ S(e_3) &= (-2, 2, 2) \\ S(e_4) &= (1, 3, 2) \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A :

$$\begin{array}{l} III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II - 4I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data da

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1), S(e_2), S(e_3)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2z + 2w = 0 \\ -2y - 6z - 5w = 0 \\ -8z - 5w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5}t \\ y = t \\ z = t \\ w = -\frac{8}{5}t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S)) = \{(6, 5, 5, -8)\}$$

b) Si tratta di esprimere $S(e_1)$, $S(e_2)$, $S(e_3)$, $S(e_4)$ rispetto alla base \mathcal{B} . Scriviamo quindi la matrice associata ai 4 sistemi $xv_1 + yv_2 + zv_3 = S(e_i)$, considerando contemporaneamente i quattro vettori:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III - I \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Risolviamo ora i quattro sistemi

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y = -2 \\ z = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow S(e_1) = (-3, 2, 4)_{\mathcal{B}} \\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \\ z = -2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow S(e_2) = (2, 0, -2)_{\mathcal{B}} \\ \begin{cases} x + y + z = -2 \\ -y = 4 \\ z = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow S(e_3) = (0, -4, 2)_{\mathcal{B}} \\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y = 1 \\ z = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S(e_4) = (-1, -1, 3)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.6 (8.35). Sia $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x + y, 2x - y - z, 2y + z)$$

e sia $\mathcal{B} = \{(1, 2, -4), (0, 1, 1), (1, 0, -7)\}$ una base di \mathbf{R}^3 .

- a) Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.
 b) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} e alla base canonica \mathcal{E} .
 c) Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} e alla base canonica \mathcal{E} .
 d) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} .

SOLUZIONE:

- a) Dobbiamo in sostanza calcolare il rango di $M_{\mathcal{E}}(T) = M(T)$:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2I \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III + 2II \\ III + 2II \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M(T)) = 3 \Rightarrow T \text{ è suriettiva}$$

$$\dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(M(T)) = 0 \Rightarrow T \text{ è iniettiva}$$

- b) Si tratta di calcolare le immagini dei vettori della base \mathcal{B} , e scrivere la matrice che ha questi come colonne. Ciò equivale a moltiplicare la matrice $M(T)$ con la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow M(T)P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Infatti $T(1, 2, -4) = (3, 4, 0)$, $T(0, 1, 1) = (1, -2, 3)$, $T(1, 0, -7) = (1, 9, -7)$, come si può determinare usando la definizione data di T .

- c) I vettori $T(e_1) = (1, 2, 0)$, $T(e_2) = (1, -1, 2)$, $T(e_3) = (0, -1, 1)$, vanno espressi nella base \mathcal{B} . Le coordinate dei vettori così ottenuti saranno le colonne di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$. Equivalentemente si ha che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}M(T) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -14 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix} M(T) = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 2 \\ -8 & -21 & -5 \\ -4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

- d) Siano $v_1 = (1, 2, -4)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, -7)$. Dati i punti precedenti per ottenere la matrice richiesta basta fare $P^{-1}M(T)P$ per ottenere la matrice richiesta.

Se non fossero state richieste le matrici precedenti, il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$$T(v_1) = (3, 4, 0), \quad T(v_2) = (1, -2, 3), \quad T(v_3) = (1, 9, -7)$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di \mathcal{B} , cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & | & 4 & -2 & 9 \\ -4 & 1 & -7 & | & 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II - 2I \\ III + 4I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & | & 12 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} III - II \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & | & 14 & 11 & -10 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i tre sistemi:

$$T(v_1) : \begin{cases} x + z = 3 \\ y - 2z = -2 \\ -z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = -30 \\ z = 14 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (-17, -30, 14)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2) : \begin{cases} x + z = 1 \\ y - 2z = -4 \\ -z = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -26 \\ z = -11 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (12, -26, -11)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3) : \begin{cases} x + z = 1 \\ y - 2z = 7 \\ -z = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 27 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (-9, 27, 10)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base \mathcal{B} è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ -14 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.7 (8.50). *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, -1, 0), v_3 = (2, 0, 0)\}$$

una base di \mathbf{R}^3 e sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 così definito:

$$T(v_1) = (3, 1, 2), \quad T(v_2) = (0, 1, 1), \quad T(v_3) = (6, 4, 6)$$

- Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.
- Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di T .
- Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v_k = (k+1, 0, k)$ appartiene all'Immagine di T .

SOLUZIONE:

- Per determinare $T(e_i)$, dobbiamo ricavare le coordinate di e_i rispetto alla base \mathcal{B} . Non è però necessario risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ in quanto semplicemente:

$$e_1 = \frac{1}{2}v_3, \quad e_2 = -v_2, \quad e_3 = v_1 - \frac{1}{2}v_3$$

Di conseguenza

$$T(e_1) = \frac{1}{2}T(v_3) = (3, 2, 3)$$

$$T(e_2) = -T(v_2) = (0, -1, -1)$$

$$T(e_3) = T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_3) = (3, 1, 2) - (3, 2, 3) = (0, -1, -1)$$

e

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Riduciamo $M(T)$ a gradini

$$\begin{array}{l} 1/3I \\ II - 2/3I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M(T)) = 2$$

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(3, 2, 3), (0, -1, -1)\}$$

Sappiamo già che $\dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(M(T)) = 1$. Per determinarne una base risolviamo il sistema omogeneo associato a $M(T)$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(0, -1, 1)\}$$

- Il vettore $v_k = (k+1, 0, k)$ appartiene all'Immagine di T se è combinazione lineare dei vettori della base in $\text{Im}(T)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & k+1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & k \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} 3II - 2I \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & k+1 \\ 0 & -3 & -1 & -2k-2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III \\ II - 3III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2k+1 \end{array} \right]$$

Infine, se $k = \frac{1}{2}$ la matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango, quindi il sistema ammette soluzione e v_k appartiene a $\text{Im}(T)$, mentre se $k \neq \frac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A|b) = 3 > \text{rg}(A) = 2$, quindi il sistema non ammette soluzione e v_k non appartiene a $\text{Im}(T)$.

□

Esercizio 9.8 (8.49). Sia $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 2)\}$ è una base di \mathbf{R}^3 .
 b) Determinare la matrice associata a T rispetto alla base \mathcal{B} .

SOLUZIONE:

- a) Basta verificare che la matrice formata dai tre vettori ha rango 3, ovvero determinante diverso da zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 2 \neq 0$$

Quindi v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti e formano una base di \mathbf{R}^3 .

- b) Come nell'esercizio precedente si può procedere in due modi. Utilizziamo il primo.

Calcoliamo le immagini dei vettori v_i della nuova base:

$$T(v_1) = A \cdot v_1 = (-2, -2, 0)$$

$$T(v_2) = A \cdot v_2 = (2, 0, -2)$$

$$T(v_3) = A \cdot v_3 = (4, 4, 8)$$

Si tratta ora di esprimere i vettori trovati rispetto alla base \mathcal{B} . Notiamo però come la cosa è immediata:

$$T(v_1) = T(1, 1, 0) = (-2, -2, 0) = -2v_1 \quad \Rightarrow \quad T(v_1) = (-2, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2) = T(-1, 0, 1) = (2, 0, -2) = -2v_2 \quad \Rightarrow \quad T(v_2) = (0, -2, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3) = T(1, 1, 2) = (4, 4, 8) = 4v_3 \quad \Rightarrow \quad T(v_3) = (0, 0, 4)_{\mathcal{B}}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base \mathcal{B} è

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che volendo utilizzare il secondo metodo la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base \mathcal{B} alla base canonica \mathcal{C} è la matrice che ha per colonne i tre vettori di \mathcal{B} (espressi rispetto a \mathcal{C}):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica \mathcal{C} alla base \mathcal{B} è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ottenuta è diagonale, la matrice di transizione P tale che $P^{-1}AP = M_{\mathcal{B}}(T)$ è detta diagonalizzante. □

Esercizio 9.9 (9.1). Verificare che $v = (1, 0, 0, 1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_3, x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

SOLUZIONE:

Calcoliamo $T(v)$:

$$T(1, 0, 0, 1) = (2, -1 + 1, 0, 1 + 1) = (2, 0, 0, 2) = 2 \cdot v$$

Quindi v è autovettore associato all'autovalore 2. □