

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 8- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 8.1 (8.17).

a) Verificare che le relazioni

$$T(1, 1, 1) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (0, 4), \quad T(1, 1, 0) = (2, 1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^2 .

b) Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.

c) Trovare basi di $\text{Im}(T)$ e di $N(T)$.

SOLUZIONE:

a) E' sufficiente verificare che l'insieme

$$\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}$$

su cui è definita la relazione costituisce una base di \mathbf{R}^3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice ha determinante diverso da zero, quindi ha rango 3 e l'insieme costituisce una base di \mathbf{R}^3 .

b) Dobbiamo determinare le immagini degli elementi e_i della base canonica di \mathbf{R}^3 . Dal momento che conosciamo $T(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, dobbiamo esprimere ogni e_i come combinazione lineare dei vettori v_i . Senza la necessità di risolvere sistemi, è immediato verificare che

$$e_1 = v_1 - v_2, \quad e_3 = v_1 - v_3, \quad e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$$

Per la linearità di T ricaviamo ora le immagini degli elementi della base canonica:

$$T(e_1) = T(v_1) - T(v_2) = T(1, 1, 1) - T(0, 1, 1) = (-1, 2) - (0, 4) = (-1, -2)$$

$$T(e_3) = T(v_1) - T(v_3) = T(1, 1, 1) - T(1, 1, 0) = (-1, 2) - (2, 1) = (-3, 1)$$

$$\begin{aligned} T(e_2) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = T(0, 1, 1) - T(1, 1, 1) + T(1, 1, 0) \\ &= (0, 4) - (-1, 2) + (2, 1) = (3, 3) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo a gradini la matrice A

$$II - 2I \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Una base dell'immagine è quindi:

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1) = (-1, -2), T(e_2) = (3, 3)\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a A :

$$\begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(4, \frac{7}{3}, 1 \right) \right\}$$

□

Esercizio 8.2 (8.30). Sia $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stabilire se T invertibile.

b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T .

SOLUZIONE:

- a) T invertibile se è biettiva, cioè suriettiva e iniettiva, ovvero se la matrice A ha rango 4. In sostanza T è invertibile se e solo se lo è A .

Riduciamo a gradini la matrice A :

$$\begin{array}{l} 1/2II + I \\ III + 1/2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} III \\ II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A ha rango 3 quindi T non è invertibile. Notiamo che potevamo immediatamente affermare che $\text{rg}(A) < 4$ in quanto A ha la quarta colonna multipla della terza.

Probabilmente per rispondere alla domanda a) era più comodo calcolare il determinante di A (che è immediato sviluppando rispetto alla seconda riga), ma la riduzione ci serviva comunque per il punto successivo.

- b) Poiché le prime tre colonne di A contengono un pivot, ne segue che

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(1, -2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, 0, 0, -1)\}$$

Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A :

$$\begin{cases} x - z + w = 0 \\ y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ w = t \end{cases}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T)) = \{(0, 0, 1, 1)\}$$

□

Esercizio 8.3 (8.16). Si consideri il seguente endomorfismo di \mathbf{R}^4

$$T(x, y, z, w) = (-x + z, 2y, x - 2z, w)$$

- a) Si determinino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.
b) Si determini l'inversa T^{-1} .

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\det(A) = 2 \neq 0$, quindi T è invertibile.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla matrice identica:

$$\begin{array}{l} \\ \\ I - III \\ 1/2II \\ -III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} -I \\ III + I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} I - III \\ 1/2II \\ -III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- a) La matrice $M(T)$ ha rango 4, quindi $\text{Im}(T)$ ha dimensione 4 e T è suriettiva. Analogamente il nucleo di T ha dimensione $4 - \text{rg}(A) = 0$, quindi T è iniettiva. Poiché T è sia iniettiva che suriettiva, T è biettiva e quindi invertibile.

b) La matrice $M(T^{-1})$ associata all'endomorfismo T^{-1} è l'inversa della matrice $M(T)$. Dai calcoli precedenti

$$M(T^{-1}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T^{-1}(x, y, z, w) = \left(-2x - z, \frac{1}{2}y, -x - z, w \right)$$

□

Esercizio 8.4 (8.34). Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, 3x - z, 2x - y + z)$$

e sia $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x, y, z) = (x + z, x - y + z, y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

SOLUZIONE:

Calcoliamo le matrici associate a f e g (rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3):

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando le matrici associate a f e g possiamo calcolare direttamente la matrice associata alle due funzioni composte. Infatti la matrice associata a $g \circ f$ è $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ e la matrice associata a $f \circ g$ è $M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$. Quindi

$$M(g \circ f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(f \circ g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la dimensione dei nuclei basta calcolare il rango delle matrici. Riducendo a gradini:

$$M(g \circ f) \Rightarrow \begin{array}{ccc} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{III} - \text{I}$$

$$M(f \circ g) \Rightarrow \begin{array}{ccc} \text{III} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{I} & \\ \text{II} & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \text{II} - 2\text{I} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{III} - 3\text{I} & \\ & \text{III} - \text{II} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \end{array}$$

Infine

$$\dim(N(g \circ f)) = 3 - \text{rg}(M(g \circ f)) = 3 - 2 = 1$$

$$\dim(N(f \circ g)) = 3 - \text{rg}(M(f \circ g)) = 3 - 1 = 2$$

□

Esercizio 8.5 (8.32). Si consideri la funzione lineare $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.
b) Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\text{Im}(T)$ al variare di k .

SOLUZIONE:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II - I \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} III \\ II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per ogni k

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$

$$\dim(\text{N}(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.}$$

□

Esercizio 8.6 (8.15). *Sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

- Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T .
- Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k , tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.

SOLUZIONE:

La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per rispondere alla domanda b) dobbiamo risolvere il sistema $A \cdot (x, y, z)^T = (3, 3, k)^T$; riduciamo quindi direttamente a gradini la matrice A affiancata dalla colonna $(3, 3, k)^T$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array} \right] \Rightarrow II + I \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III - II \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{array} \right]$$

- Considerando la matrice A otteniamo che una base dell'immagine di T è data da

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(2, -2, 0), (0, 1, 1)\}$$

Risolvendo il sistema $Ax = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\text{N}(T)) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right) \right\}$$

- T non è iniettiva in quanto il nucleo di T ha dimensione 1.

Risolviamo il sistema $Ax = (3, 3, k)^T$. Il sistema ha soluzione solo se $k = 6$ quando otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 6 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Infine $(3, 3, k)$ appartiene all'immagine di T solo se $k = 6$. In tale caso i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$ sono i vettori del tipo $v = \left(\frac{3}{2}, 6, 0 \right) + \left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right)t, \forall t \in \mathbf{R}$.

Notiamo che i vettori del tipo $\left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right)t$ sono gli elementi del nucleo. Infatti se $v_0 = \left(\frac{3}{2}, 6, 0 \right)$ e $w \in \text{N}(T)$, poiché $T(v_0) = (3, 3, 6)$, allora $T(v_0 + w) = T(v_0) + T(w) = (3, 3, 6) + (0, 0, 0) = (3, 3, 6)$.

□

Esercizio 8.7 (8.9). *Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : x + 2y = 0$.

SOLUZIONE:

Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \pi = \{(x, y, z) = (-2t, t, s) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Notiamo che poichè il piano passa per l'origine, i suoi punti costituiscono uno spazio vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x, y, z) = (-2t, t, s)$ di π è quindi data da

$$T(x, y, z) = A \cdot (x, y, z) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t \\ -5t \\ 2t + s \end{bmatrix} = (7t, -5t, 2t + s).$$

Infine l'immagine di π è il piano di equazioni parametrica e cartesiana:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \\ z = 2t + s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, \quad \Rightarrow \quad T(\pi) : \quad 5x + 7y = 0$$

□

Esercizio 8.8 (8.22). Sia $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y) = (kx + 4y, x + ky, y)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro k .

SOLUZIONE:

Notiamo innanzitutto che

- T è iniettiva se $N(T) = \{(0, 0)\}$, ovvero se $\dim(N(T)) = 0$.
- T è suriettiva se $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, ovvero se $\dim(\text{Im}(T)) = 3$.

Si tratta quindi di trovare immagine e nucleo di T .

Calcoliamo $T(e_1)$ e $T(e_2)$ per determinare la matrice associata a T :

$$T(e_1) = (k, 1, 0)$$

$$T(e_2) = (4, k, 1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a gradini.

$$\begin{array}{l} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ k & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow III - kI \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 - k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow III - (4 - k^2)II \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che $\text{rg}(A) = 2$, quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \Rightarrow T \text{ non è suriettiva}$$

Notiamo che lo stesso risultato lo potevamo ottenere osservando che

$$\text{Im}(T) = \langle T(e_1), T(e_2) \rangle$$

quindi $\dim(\text{Im}(T)) \leq 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$. In nessun caso infatti una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ può essere suriettiva.

Per il teorema di nullità più rango

$$\dim(N(T)) = \dim(\mathbf{R}^2) - \dim(\text{Im}(T)) = 2 - 2 = 0$$

Quindi

$$N(T) = \{(0, 0)\} \Rightarrow T \text{ è iniettiva}$$

Lo stesso risultato lo potevamo ottenere risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + ky = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow N(T) = \{(0, 0)\}$$

□

Esercizio 8.9 (8.23). Sia $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare del parametro reale k .
 b) Determinare la dimensione di immagine e nucleo di T al variare di k .

SOLUZIONE:

- a) T è suriettiva se $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^4$, cioè se $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 4$. Inoltre T è iniettiva se $N(T) = \{(0, 0, 0, 0)\}$, cioè se $\dim(N(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 0$. Si tratta perciò di calcolare il rango di A . Utilizziamo il calcolo del determinante, che svilupperemo rispetto alla quarta colonna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1 \cdot (k+3) \cdot \det \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 \\ k+1 & 0 & 0 \\ 2k^2 & 0 & k \end{bmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) \cdot (k+3) \cdot (k+1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3k+4 \\ 0 & k \end{bmatrix} = (k+3) \cdot (k+1) \cdot k \end{aligned}$$

- Se $k \neq -3, -1, 0$, allora $\det(A) \neq 0$ e $\text{rg}(A) = 4$. Quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 4 \Rightarrow T \text{ è suriettiva}$$

$$\dim(N(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 0 \Rightarrow T \text{ è iniettiva}$$

- Se $k = -3, -1$ o 0 , allora

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) \leq 3 \Rightarrow T \text{ non è suriettiva}$$

$$\dim(N(T)) = 4 - \text{rg}(A) \geq 1 \Rightarrow T \text{ non è iniettiva}$$

- b) Abbiamo già visto la dimensione di immagine e nucleo per $k \neq -3, -1, 0$. Consideriamo ora gli altri casi.

- Se $k = -3$ allora $\det(A) = 0$ e $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2(1+10) = 22 \neq 0$$

Quindi $\text{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 3$$

$$\dim(N(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 1$$

- Se $k = -1$ allora $\det(A) = 0$ e $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi $\text{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\text{N}(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 1$$

– Se $k = 0$ allora $\det(A) = 0$ e $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 20 = -19 \neq 0$$

Quindi $\text{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\text{N}(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 1$$

□

Esercizio 8.10 (8.24). Sia $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w, -x + 2y - z, -x + y + 3z - 3w)$$

- Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
- Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\text{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
- Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\text{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^4$.

SOLUZIONE:

- Calcoliamo l'immagine degli elementi della base canonica di \mathbf{R}^4 :

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (-1, -1, -1) & T(e_2) &= (-1, 2, 1) \\ T(e_3) &= (1, -1, 3) & T(e_4) &= (1, 0, -3) \end{aligned}$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

- Poichè

$$\text{Im}(T) = \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4) \rangle$$

ovvero $\text{Im}(T)$ è generato dai vettori colonna di A , per determinarne dimensione e base riduciamo la matrice A a gradini:

$$\begin{aligned} II - I \quad III - I & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow 1/2III & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ III - 3II & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 1/5III & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

LA matrice A ha rango 3, quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 3$$

Inoltre le prime tre colonne di A sono linearmente indipendenti quindi possiamo prendere come base di $\text{Im}(T)$ i tre vettori $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\text{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \\ &= \{(-1, -1, -1), (-1, 2, 1), (1, -1, 3)\} \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso $\text{Im}(T)$ è un sottospazio di \mathbf{R}^3 di dimensione 3, quindi $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ (e T è suriettiva).

- c) Gli elementi di $N(T)$ sono i vettori di \mathbf{R}^4 , soluzione del sistema omogeneo a cui è associata la matrice A . Prendiamo la matrice già ridotta a gradini:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} -x - y + z + w = 0 \\ y + z - 2w = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$N(T) = \{(1, 1, 1, 1)t \mid t \in \mathbf{R}\}$$

$$\dim(N(T)) = 1$$

$$\mathcal{B}(N(T)) = \{(1, 1, 1, 1)\}$$

Notiamo che, come ci aspettavamo dal teorema di nullità più rango:

$$\dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$$

□

Esercizio 8.11 (8.26). Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

- a) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
b) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T .

SOLUZIONE:

Ricaviamo la matrice A associata all'applicazione T calcolando le immagini degli elementi della base canonica di \mathbf{R}^3 :

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2)$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (-1, -3)$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0)$$

quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rispondiamo ad entrambi i quesiti contemporaneamente ricordando che un'applicazione è iniettiva se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo, ovvero se $\dim(N(T)) = 0$, ed è suriettiva se la sua immagine è tutto lo spazio di arrivo, ovvero in questo caso se $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Poichè la matrice A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

di determinante $-1 \neq 0$, la matrice A ha rango 2. Quindi

- $\dim(\text{Im}(T)) = 2 \Rightarrow T$ è suriettiva.
- Per il teorema di nullità più rango: $\dim(N(T)) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow T$ non è iniettiva.

□

Esercizio 8.12 (8.53). Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di \mathbf{R}^3 . Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

- a) Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad \mathcal{E} .
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.

SOLUZIONE:

Dalla definizione otteniamo

$$T(e_1) = (3, -1, 1)$$

$$T(e_2) = (0, 1, -1)$$

$$T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2) = (6, -2, 2) + (0, 1, -1) = (6, -1, 1)$$

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo T a gradini

$$\begin{array}{l} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza una base dell'immagine di T è $\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(3, -1, 1), (0, 1, -1)\}$.

Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a T :

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

e una base del nucleo di T è $\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(-2, -1, 1)\}$.

b) Dai conti svolti nel punto precedente vediamo che A ha rango 2, quindi non è invertibile. Altrettanto l'endomorfismo T non è invertibile.

□