CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 7.1. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$*. Stabilire se* T *è lineare.*

SOLUZIONE:
Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(2v) = 2T(v)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^3$. Sia per esempio $v = (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} &T(v) = T(1,0,0) = (1,0,0) \;\Rightarrow\; 2T(v) = (2,0,0) \\ &T(2v) = T(2,0,0) = (4,0,0) \end{aligned}$$

Quindi $T(2v) \neq 2T(v)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 7.2. *Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici* $M_{2\times 2}$ *avalori in* $\mathbf{R}$ *non è lineare.*

SOLUZIONE:
Sia T la funzione determinante: $T(A) = \det(A)$. Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(A) + T(B) = T(A + B)$ per ogni $A,\ B \in M_{2\times 2}$. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} &T(A) = T(B) = 0 \;\Rightarrow\; T(A) + T(B) = 0 \\ &T(A + B) = 1 \end{aligned}$$

Quindi $T(A) + T(B) \neq T(A + B)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 7.3. *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

SOLUZIONE:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$T(1,2) + T(1,5) = T((1,2) + (1,5)) = T(1 + 1, 2 + 5) = T(2,7),$$

mentre

$$\begin{aligned} &T(1,2) + T(1,5) = (3,0) + (1,4) = (4,4) \\ &T(2,7) = (4,5) \end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

□

Esercizio 7.4. *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,4) = (5,0), \qquad T(0,1) = (1,1)$$

SOLUZIONE:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$2T(1,2) = T(2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = T(2,4),$$

mentre

$$\begin{aligned} &2T(1,2) = 2(3,0) = (6,0) \\ &T(2,4) = (5,0) \end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

□

Esercizio 7.5. *Determinare una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Soluzione:

Possiamo procedere in due modi.

(1) Ricaviamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^2$ imponendo la linearità di T:

$$2T(0,1) = T(0,2) = (4,4) \ \Rightarrow \ T(0,1) = (2,2)$$
$$T(1,0) = T(1,1) - T(0,1) = (1,2) - (2,2) = (-1,0)$$

Di conseguenza, preso il generico elemento $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in \mathbf{R}^2$, per la linearità di T deve essere

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(-1,0) + y(2,2) = (-x+2y, 2y)$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1) = (1,2)$ e $T(0,2) = (4,4)$ come richiesto.

(2) Alternativamente possiamo scrivire il generico elemento $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di cui conosciamo l'immagine (che formano una base di $\mathbf{R}^2$): $(1,1)$ e $(0,2)$. Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,2) \ \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ a + 2b = y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{-x+y}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{-x+y}{2}(0,2)$$

Essendo T lineare deve quindi essere

$$\begin{aligned} T(x,y) =& x\,T(1,1) + \frac{-x+y}{2}\,T(0,2) = x(1,2) + \frac{-x+y}{2}(4,4) \\ =& (x,2x) + (-2x+2y, -2x+2y) = (-x+2y, 2y) \end{aligned}$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1) = (1,2)$ e $T(0,2) = (4,4)$ come richiesto.

□

Esercizio 7.6. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.*

a) *Verificare che T è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
d) *Determinare $T(1,2)$.*

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_i \in \mathbf{R}^2$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

Siano quindi $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, allora

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ T(v_1) + T(v_2) &= (x_1 + y_1, 2x_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, 2x_2, x_2 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Quindi la prima proprietà è verificata. Analogamente

$$T(\lambda v) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y)$$
$$\lambda T(v) = \lambda(x+y, 2x, x-y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y)$$

Anche la seconda proprietà è verificata, quindi T è lineare.

b) Per definizione

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in \mathbf{R}^2 \mid T(v) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x + y, 2x, x - y) = (0, 0, 0)\} \subseteq \mathbf{R}^2$$

Si tratta quindi di cercare le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in \mathbf{R}^2\} \subseteq \mathbf{R}^3 \\ &= \{(x + y, 2x, x - y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(1, 2, 1)x + (1, 0, -1)y \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle(1, 2, 1),\ (1, 0, -1)\rangle \end{aligned}$$

A questo punto per trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$ dobbiamo studiare la dipendenza lineare dei generatori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice ha rango due e i due generatori di $\mathrm{Im}(T)$ sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1, 2, 1),\ (1, 0, -1)\}.$$

d) Con la definizione di T: $T(1, 2) = (1 + 2, 2 \cdot 1, 1 - 2) = (3, 2, -1)$

□

Esercizio 7.7. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, -1)$.*

a) *Esplicitare $T(x, y)$.*
c) *Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Soluzione:

a) Il generico vettore $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ si può esprimere come $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$. Quindi per la linearità di T:

$$T(v) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \cdot (1, 2, 1) + y \cdot (1, 0, -1) = (x + y,\ 2x,\ x - y)$$

c) Il vettore $w = (3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se esiste $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tale che $T(x, y) = w$, ovvero se $(x + y, 2x, x - y) = (3, 4, 1)$. Si tratta quindi di stabilire se il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (3, 4, 1) = T(2, 1) \in \mathrm{Im}(T)$$

□

Esercizio 7.8. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2)$$

a) *Trovare una base del nucleo $\mathrm{N}(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.*
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?*

Soluzione:

Ricordiamo che $\mathrm{Im}(T)$ è il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$ così definito:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in \mathbf{R}^4\} = \\ &= \{(x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{(1, 1, 0, 0, -1) \cdot x_1 + (-1, 1, 1, 1, -1) \cdot x_2 + (0, 0, 0, 3, 0) \cdot x_3 + (0, 0, 0, 0, 0) \cdot x_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} = \\ &= \langle(1, 1, 0, 0, -1),\ (-1, 1, 1, 1, -1),\ (0, 0, 0, 3, 0),\ (0, 0, 0, 0, 0)\rangle \end{aligned}$$

Quindi la dimensione di $\mathrm{Im}(T)$ equivale al rango della matrice A associata a tali vettori. Notiamo inoltre che tali vettori non sono altro che l'immagine della base canonica di $\mathbf{R}^4$. Infatti:

$$T(e_1) = (1, 1, 0, 0, -1), \qquad T(e_2) = (-1, 1, 1, 1, -1)$$
$$T(e_3) = (0, 0, 0, 3, 0), \qquad T(e_4) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

Inoltre v_k appartiene all'immagine di T se $v_k \in \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\rangle$.

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice $A|v_k$ associata al sistema lineare necessario per rispondere al punto c).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - III \\ V + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2III - II \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ IV \\ III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dalla matrice dei coefficienti ridotta ricaviamo che questa ha rango 3 e che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(A) = 3 \\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \\ &= \{(1, 1, 0, 0, -2),\ (-1, 1, 1, 1, 0),\ (0, 0, 0, 3, 0)\} \end{aligned}$$

Dal teorema di nullità più rango sappiamo che

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\text{spazio di partenza})$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1$$

Per ricavare esplicitamente la base $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T))$ notiamo che, dato un vettore v di $\mathbf{R}^4$,

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{N}(T) \quad \text{sse} \quad T(v) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla precedente matrice A.

In sostanza basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice ridotta precedentemente a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (0, 0, 0, 1)\ \}$$

Anche senza utilizzare il teorema di nullità più rango potevamo ricavare esplicitamente da qui la dimensione del nucleo.

b) Abbiamo visto al punto precedente che

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < 5 = \dim(\mathbf{R}^5) \ \Rightarrow \quad T \text{ non è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \quad T \text{ non è iniettiva}$$

c) Il vettore $v_k \in \mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|v_k$ impostato all'inizio è compatibile. Dalla matrice ridotta a gradini vediamo che deve essere $k = 0$. In tale caso il rango della matrice completa e incompleta è 3, quindi il sistema è compatibile. Calcoliamo le soluzioni (anche se non era effettivamente richiesto) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 2 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$v_0 = T(1,1,1,t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 7.9. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di* T *al variare del parametro reale* k.
b) *Stabilire per quali valori di* k *il vettore* $v = (3,3,1,0)$ *appartiene all'immagine di* T.

Soluzione:
Come nell'esercizio precedente notiamo che l'immagine di T è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ così definito:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \left\{T(v) \mid v \in \mathbf{R}^3\right\} = \\ &= \{(2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{(2k,0,1,1)\cdot x_1 + (-1,1,1,-1)\cdot x_2 + (0,k,-1,0)\cdot x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\} = \\ &= \langle (2k,0,1,1),\ (-1,1,1,-1),\ (0,k,-1,0)\rangle \\ &= \langle T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\rangle \end{aligned}$$

Analogamente il nucleo di T è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ così definito

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \left\{v \in \mathbf{R}^3 \mid T(v) = 0\right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2kx_1 - x_2 = 0,\ x_2 + kx_3 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\} \end{aligned}$$

Per risolvere a tutte le domande riduciamo quindi a gradini la seguente matrice $A|v$

$$A|v = \begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ III \\ II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 2k & -1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - 2kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 0 & -1+2k & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III - II \\ 2IV - (2k-1)III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix}$$

Conviene forse interrompere la riduzione a questo punto.

a) $2k + 1$ e $2k - 1$ non possono essere entrambi nulli, quindi la matrice A ha sempre rango 3:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}$$

b) Il sistema $A|v$ ammette soluzione quando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v)$. Abbiamo appena visto che $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi il sistema ammette soluzione se anche $\mathrm{rg}(A|v) = 3$, cioè se $\det(A|v) = 0$. Calcoliamo quindi il determinante della matrice ridotta:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot [(2k+1)(-2k+7) - (2k-1)\cdot 5] \\ &= 2 \cdot (-4k^2 + 2k + 12) \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado vediamo che il determinante si annulla per $k = -3, 4$.

Infine v appartiene all'immagine di T quando $k = -3, 4$.

□