CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FOGLIO DI ESERCIZI 5– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 5.1. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(2,1,1,1,0) + a_2(1,-1,-1,3,1) + a_3(0,-3,0,1,0).$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,1,1,1,0), \quad v_2 = (1,-1,-1,3,0), \quad v_3 = (0,-3,0,1,0).$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^5$).

b) Si tratta di stabilire quali vettori tra $v_1,\ v_2$ e v_3 sono linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la matrice associata a v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2II - I \\ III - II \\ IV - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ 3IV + 4II \\ 3V + II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Anche senza ridurre completamente la matrice si vede che questa ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

□

Esercizio 5.2. *Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma*

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *Trovare una base di W.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (0,1,1,1,-2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:
Notiamo che

$$w = a_1(2,2,1,0,1) + a_2(-1,0,0,1,-4) + a_3(-1,-1,0,0,1)$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,2,1,0,1), \qquad v_2 = (-1,0,0,1,-4), \qquad v_3 = (-1,-1,0,0,1)$$

W è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se i tre vettori, o eventualmente quali, sono linearmente indipendenti. Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, o di una parte di essi. Per rispondere a entrambe le domande dobbiamo quindi ridurre a gradini la matrice associata ai tre vettori v_1, v_2 e v_3, e al vettore v.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ 2III - II \\ \\ IV - III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - II \\ V + 4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ V - III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) La matrice associata a v_1, v_2 e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di W è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.
b) Si tratta di esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, ovvero di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow x = y = z = 1$$

Infine le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1)$.

□

Esercizio 5.3. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{\ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{\ (0, -1, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\}$$

□

Esercizio 5.4. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1,\ x - 2y + z = 0,\ -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:

Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x-2y+kz=k-1 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+4ky-2z=0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k=1$.

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k=1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x-2y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2s-t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} S &= \{\ (2s-t,s,t) \mid s,t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{\ (2s,s,0)+(-t,0,t) \mid s,t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{\ (2,1,0)\cdot s+(-1,0,1)\cdot t \mid s,t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 5.5. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S=\left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1-x_2+2x_5=k,\ x_1+x_3+kx_4=0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*

b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

Soluzione:

a) S è uno spazio vettoriale se il sistema è omogeneo cioè se $k=0$.

b) Risolviamo il sistema omogeneo, riducendo la matrice associata a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1=-r \\ x_2=-r+2t \\ x_3=r \\ x_4=s \\ x_5=t \end{cases} \qquad \forall\ r,s,t\ \in\ \mathbf{R}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-r,-r+2t,r,s,t)\ |r,s,t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-r,-r,r,0,0)+(0,0,0,s,0)+(0,2t,0,0,t)\ |r,s,t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-1,-1,1,0,0)\cdot r\ +\ (0,0,0,1,0)\cdot s\ +\ (0,2,0,0,1)\cdot t\ |r,s,t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 5.6. *Sia dato l'insieme*

$$V=\{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1)=0\ \}$$

a) *Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*

b) *Determinare una base di V.*

Soluzione:

a) Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad a_i \in \mathbf{R}$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. A $p(x)$ possiamo associare le sue componenti $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$ formata dai polinomi $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$. Quindi a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x]$ possiamo associare il vettore $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4$.
Nel nostro caso la condizione $p(1) = 0$ si traduce nella condizione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, quindi all'insieme di polinomi V corrisponde l'insieme:
$$W = \left\{(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\}$$
cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo formato dalla sola equazione $a_0+a_1+a_2+a_3 = 0$.
L'insieme W, e quindi l'insieme V, è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.

b) Per trovare una base di V determiniamo una base di W per poi tornare ai polinomi.
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -r - s - t \\ a_1 = r \\ a_2 = s \\ a_3 = t \end{cases} \qquad \forall r, s, t \in \mathbf{R}$$
Quindi il generico elemento di W ha la forma
$$(-1, 1, 0, 0) \cdot r + (-1, 0, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 0, 1) \cdot t$$
e una base di W è data dall'insieme
$$\mathcal{B}(W) = \{(-1, 1, 0, 0),\ (-1, 0, 1, 0),\ (-1, 0, 0, 1)\}$$
Associamo ora ai vettori determinati i corrispondenti polinomi:
$$\begin{aligned}(-1, 1, 0, 0) \ &\Rightarrow\ p_1(x) = -1 + x \\ (-1, 0, 1, 0) \ &\Rightarrow\ p_2(x) = -1 + x^2 \\ (-1, 0, 0, 1) \ &\Rightarrow\ p_3(x) = -1 + x^3\end{aligned}$$
Infine l'insieme
$$\mathcal{B}(V) = \left\{p_1(x) = -1 + x,\ p_2(x) = -1 + x^2,\ p_3(x) = -1 + x^3\right\}$$
è una base di V.

Esercizio 5.7. *Siano dati i polinomi*
$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{1, \quad x, \quad x^2\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 possiamo associamo i tre vettori
$$\begin{aligned}p_1 &= (1, 1, 0)\\ p_2 &= (1, 2, 1)\\ p_3 &= (0, 1, -1)\end{aligned}$$
Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.
Inoltre al polinomio $f(x)$ associamo il vettore $f(2, -1, 1)$
Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad III - II \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente idipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.

b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 5.8. *Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.*

Soluzione:

Come negli esercizi precedenti associamo a $p(x)$ le sue componenti rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$, $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad p = (d, c, b, a)$$

Imponiamo le due condizioni al generico polinomio di grado al più 3:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \ \Rightarrow \ d = 0 \\ p(1) = 0 \ \Rightarrow \ a + b + c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Quindi a W corrisponde il sottospazio V formato dagli elementi di $\mathbf{R}^4$ soluzioni del sistema omogeneo:

$$V = \{(d, c, b, a) \in \mathbf{R}^4 \mid d = 0,\ a + b + c = 0\}$$

Scriviamo ora le soluzioni di tale sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a = -s - t \\ b = s \\ c = t \\ d = 0 \end{cases} \qquad \forall s, t, \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$V = \langle\ (0, 0, 1, -1),\ (0, 1, 0, -1)\rangle$$

Tali vettori sono linearmente indipendenti non essendo l'uno multiplo dell'altro.

Infine

$$W = \langle p_1(x) = x^2 - x^3,\ p_2(x) = x - x^3\ \rangle$$

□

Esercizio 5.9. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi sono linearmente dipendenti.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti esprimere un polinomio come combinazione lineare degli altri.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_2[x] = \left\{a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{1, \quad x, \quad x^2\right\}$. In particolare ai polinomi $p_1,\ p_2,\ p_3$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (0, 1, 1)$$
$$p_2 = (-1, 0, k)$$
$$p_3 = (k, 2, 1)$$

Di conseguenza i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3.

Riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori a cui affianchiamo la matrice identica 3×3.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ kII + III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & -1+k^2 \end{bmatrix}$$

a) Se $k = \pm 1$ la matrice associata ai vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$ ha rango 2, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti. Si noti che per ogni k, p_1 e p_2 sono linearmente indipendenti.

b) Possiamo utilizzare la riduzione precedente e leggere l'ultima colonna come colonna dei termini noti del sistema $ap_1(x) + bp_2(x) = p_3(x)$ per ottenere la relazione richiesta fra i tre polinomi:
   – Se $k = 1$ si ottiene $a = 2$, $b = -1$, cioè $2p_1(x) - p_2(x) = p_3(x)$
   – Se $k = -1$ si ottiene $a = 2$, $b = 1$, cioè $2p_1(x) + p_2(x) = p_3(x)$

□

Esercizio 5.10.

a) *Mostrare che l'insieme*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

b) *Determinare una base di* W.

Soluzione:

a) Verifichiamo le due proprietà richieste per uno spazio vettoriale.
   – SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3a_1 & -a_1+b_1 \\ a_1 & -2a_1+b_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3a_2 & -a_2+b_2 \\ a_2 & -2a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

   due generici elementi di W. Allora

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 3a_1 + 3a_2 & -a_1+b_1-a_2+b_2 \\ a_1+a_2 & -2a_1+b_1-2a_2+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(a_1+a_2) & -(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2) & -2(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \end{cases}$$

   Quindi $A_1 + A_2 \in W$.
   – PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix}$$

   un generico elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 3(\lambda a) & -\lambda a + \lambda b \\ \lambda a & -2(\lambda a) + \lambda b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a' & -a'+b' \\ a' & -2a'+b' \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \end{cases}$$

   Quindi $\lambda A \in W$.

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a \\ a & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   è un insieme generatore di W. Dobbiamo ora verificare se A e B sono linearmente indipendenti, ovvero se l'equazione $xA + yB = 0$ ha la sola soluzione nulla $x = y = 0$:

$$xA + yB = \begin{bmatrix} 3x & -x+y \\ x & -2x+y \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $xA + yB = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -x + y = 0 \\ x = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$

Quindi A e B sono linearmente indipendenti e una base di W è data da

$$\mathcal{B} = \{A,\ B\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\square$

Esercizio 5.11. *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice* $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora

$$A\,(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)\,A$$

   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.
   – **prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$A\,(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)\,A$$

   Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Scriviamo esplicitamente le soluzioni di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$AM = \begin{bmatrix} -8a - 7c & -8b - 7d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$MA = \begin{bmatrix} -8a + b & -7a \\ -8c + d & -7c \end{bmatrix}$$

Quindi

$$MA = AM \ \Rightarrow \begin{cases} -8a - 7c = -8a + b \\ -8b - 7d = -7a \\ a = -8b + d \\ b = -7c \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b + 7c = 0 \\ 7a - 8b - 7d = 0 \\ a + 8b - d = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 7 & -8 & 0 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 7I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & -56 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - 8II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -8t + s \\ b = -7t \\ c = t \\ d = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi gli elementi di S sono del tipo

$$M = \begin{bmatrix} -8t + s & -7t \\ t & s \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s \ |\forall s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

Di conseguenza S ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Esercizio 5.12. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA = 0\}$. *Dimostrare che* S *è un sottospazio di* $M_2(\mathbf{R})$ *e calcolarne la dimensione.*

Soluzione:

Sia

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbf{R})$. Cominciamo a calcolare gli elementi di S:

$$AM = \begin{bmatrix} x - z & y - w \\ -2x + 2z & -2y + 2w \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$

$$MA = \begin{bmatrix} x - 2y & -x + 2y \\ z - 2w & -z + 2w \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Chiamiamo B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

S è quindi formato dai multilpli di B. E' perciò immediato dimostare che si tratta di un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}$:

- SOMMA. Se A_1 e A_2 appartengono a S, allora $A_1 = t_1 \cdot B$ e $A_2 = t_2 \cdot B$ per opportuni $t_1, t_2 \in S$, quindi
$$A_1 + A_2 = t_1 \cdot B + t_2 \cdot B = (t_1 + t_2) \cdot B \ \in \ S$$
- PRODOTTO per scalari. Sia $A = t \cdot B$ un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora
$$\lambda A = \lambda \cdot t \cdot B = (\lambda \cdot t) \cdot B \ \in \ S$$

In particolare S è uno spazio vettoriale di dimensione 1, generato dalla matrice B.

□

Esercizio 5.13.

a) *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^5$ *sono linearmente dipendenti:*
$$v_1 = (0, 1, -1, 0, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 1, 0, k), \qquad v_3 = (-1, 2, -3, 0, 0).$$
b) *Per i valori di* k *determinati in* a), *esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Soluzione:

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ III+II \\ V-II \\ IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & k & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ IV-kII \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2+k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \\ (k-2)z=0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 2$ otteniamo la soluzione $x = y = z = 0$ e i tre vettori sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi per $k = 2$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

b) Al punto precedente abbiamo trovato che se $k = 2$ allora

$$-2tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

In particolare ponendo per esempio $t = 1$ oteniamo

$$v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$
$$v_2 = 2v_1 - v_3$$
$$v_3 = 2v_1 - v_2$$

$\square$