CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 4.1. *Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A e procediamo affiancando ad A la matrice identica 2×2 prima di calcolare $rref(A)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/5II \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} I-2II \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la matrice B e procediamo affiancando a B la matrice identica 3×3 prima di calcolare $rref(B)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\begin{matrix} \\ 1/2II \\ III-II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/2III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} I-3III \\ II+1/2III \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} I+II \\ \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che se $M \in M_{n\times n}$ è una matrice tale che $rref(M) = I_n$, allora $\text{rg}(M) = n$, quindi:
una matrice $n \times n$ è **invertibile** *se e solo se ha rango n.*

□

Esercizio 4.2. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Soluzione:

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} III \\ 1/2II \\ I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & k-1 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ k & k-1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I-II \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-kI \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{bmatrix}$$

– Se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A) = 3$,
– Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$,
– Se $k = 1$, $\text{rg}(A) = 1$.

a) A è invertibile, se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.
Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+4II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I-2II \\ \\ 1/2III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-III \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 4.3. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-3kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

Quindi:
– Se $k \neq \pm 1$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
– Se $k = 1$ o $k = -1$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \pm 1$.

□

Esercizio 4.4 (6.6)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 0 & -3+2k \end{bmatrix}$$

Quindi:
– Se $k \neq \frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = 3$ e A è invertibile.
– Se $k = \frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = 2$ e A non è invertibile.

b) Calcoliamo l'inversa di A calcolando $rref(A)$ dopo avere affiancato a A, con $k=1$, la matrice identica:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} I + III \\ II + III \\ -III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{se } k = 1$$

□

Esercizio 4.5 (6.11)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$\begin{matrix} \\ \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + kII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & k(k-4) \end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} I + III \\ \\ III + kII \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-4) & -2 & k & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} II - \frac{1}{k} III \\ \frac{1}{k(k-4)} III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \qquad \forall k \neq 0, 4$$

□

Esercizio 4.6. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali* $\mathrm{null(A)} = \mathrm{null(B)} = 0$.
b) *Sia $C = AB$. Stabilire se il sistema lineare $Cx = 0$ ha soluzione unica quando $k = 0$.*

Soluzione:

a) Ricordiamo che in una matrice A di dimensioni $m \times n$ si ha $\mathrm{null(A)} = \mathrm{n} - \mathrm{rg(A)}$. Quindi in questo caso $\mathrm{null(A)} = 3 - \mathrm{rg(A)}$ e $\mathrm{null(A)} = 0$ se e solo se $\mathrm{rg}(A) = 3$; la stessa cosa vale per B. Determiniamo dunque per quali k la matrice A ha rango massimo, riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & -2k & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi null(A) $= 0$ se e solo se $k \neq 0$.

Riduciamo ora la matrice B

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II + I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & k+2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5III - (k+2)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & k+7 \end{bmatrix}$$

Si conclude che null(B) $= 0$ se e solo se $k \neq -7$.

Quindi null(A) $=$ null(B) $= 0$ se e solo se $k \neq 0, -7$.

b) Per $k = 0$ la matrice $C = AB$ è

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 10 & 7 & -2 \\ -10 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ed essendo le ultime due righe una opposta dell'altra, tale matrice non ha rango massimo, per cui il sistema $Cx = 0$, non ha un'unica soluzione.

L'esercizio poteva essere risolto in maniera differente utilizzando i determinanti.

$\square$

Esercizio 4.7 (7.14)**.** *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - (k+1)x_2 = k \\ 2x_1 - 2x_2 = 2k \\ (k+2)x_1 + (k-2)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -k-1 & k \\ 2 & -2 & 2k \\ k+2 & k-2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \\ III \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k \\ 1 & -k-1 & k \\ k+2 & k-2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ II - I \\ III - (k+2)I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 2k & -k(k+2) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k(k+2) \end{array}\right]$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 0, -2$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è compatibile.
   – Se $k = -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema è compatibile, e ammette una soluzione.
   – Se $k = 0$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ quindi il sistema è compatibile, e ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k = -2$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Se $k = 0$ il sistema si riduce alla sola equazione $x_1 - x_2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

$\square$

Esercizio 4.8. *Al variare del parametro reale k, si risolva il sistema di equazioni lineari omogenee:*

$$\begin{cases} 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 - 2kx_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice dei coefficienti associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 2k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & k \\ 1 & 0 & -2k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & k \\ 0 & 2k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ -III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & k \\ 0 & 2k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k-2 & k-1 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro in corrispondenza dei pivot.

- Se $k = 0$ la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow \ S = \{(0, t, 0, 0) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

  Notiamo che $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|0) = 3$. Poiché si tratta di un sistema in quattro incognite, nell'insieme delle soluzioni ci sono infinite soluzioni con un solo parametro libero; il numero è dato da null(A) $= 4 - \mathrm{rg(A)} = 4 - 3 = 1$.

- Se $k = 1$ la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t - s \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$S = \left\{ \left(t - s, -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s, t, s \right) \mid s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

  Notiamo che $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|0) = 2$. Poiché si tratta di un sistema in quattro incognite, nell'insieme delle soluzioni ci sono infinite soluzioni con due parametri liberi; il numero è dato da null(A) $= 4 - \mathrm{rg(A)} = 4 - 2 = 2$.

- Se $k \neq 0, 1$ la matrice dei coefficienti ha rango $3 < 4 =$ numero delle incognite, quindi il sistema ammette comunque infinite soluzioni con un solo parametro libero

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2(k-1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{4k}{3}(1+k)t \\ x_2 = t \\ x_3 = -\frac{2k}{3}t \\ x_4 = \frac{4k}{3}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \left(-\frac{4k}{3}(1+k)t,\ t,\ -\frac{2k}{3}t,\ \frac{4k}{3}t \right) \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

  Notiamo che abbiamo scelto x_2 come variabile libera in modo da non dovere dividere per k per determinare la soluzione. Inoltre con tale scelta non è in realtà necessario distinguere il caso $k = 0$ precedentemente discusso.

.

□

Esercizio 4.9 (7.17)**.** *Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

a) *Si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzione.*
b) *Si stabilisca se esistono valori di k per i quali il sistema ha soluzione unica.*

Soluzione:
La matrice $A|b$ associata al sistema è:

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ k & 0 & 0 & k & | & 1 \end{bmatrix}$$

Per ridurre a gradini la matrice scambiamo la prima e terza colonna

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & k & k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-2k & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & k & k & | & 1 \end{bmatrix}$$

a) Se $k \neq \frac{1}{2},\ 0$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (infinite) soluzioni. Se $k = \frac{1}{2}$ o $k = 0$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ha soluzione.
b) La matrice A è 3×4, quindi A ha sempre rango minore o uguale a tre, cioè minore del numero delle incognite e il sistema non può ammettere soluzione unica.

□

Esercizio 4.10. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.
a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\text{Sol}(Ax = b)$.

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & | & 1 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k-4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro.

– Se $k \neq 1, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{3-k}{k+1} - 3 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{1-(k-2)}{k+1} = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{k+5}{k+1} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases}$$

– Se $k = 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + (-3, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbf{R}$.

– Se $k = 1$ si ha $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Per stabilire se v appartiene all'insieme $\text{Sol}(Ax = b)$ la cosa più semplice è sostituire le sue coordinate $(x, y, z, w) = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 3 = 1 \\ -2 + 2 = 0 \\ (k+1) \cdot \frac{1}{3} + (k-2) \cdot 1 = 1 \\ (k-2) \cdot 1 = k-2 \end{cases} \Rightarrow \quad k = 2$$

Oppure si poteva sostituire nel sistema iniziale, ottenendo le condizioni:

$$\begin{cases} -\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 3 = 1 \\ -\frac{7}{3} - 2 + \frac{1}{3} + 5 = 1 \\ -\frac{7}{3} + 2 + \frac{k+2}{3} + k - 1 = 2 \\ -\frac{7}{3} + \frac{k+2}{3} + 2k - 1 = k \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

Quindi $v \in \text{Sol}(Ax = b)$ se $k = 2$.

□

Esercizio 4.11 (v. 7.62)**.** *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*

b) *Calcolare* null(A) *e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{matrix} II \\ III \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & -k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - kII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k-k^2 & -1-k \end{bmatrix}$$

a) Per quanto riguarda il rango di A otteniamo:
   – Se $k \neq -1$ la matrice A ha rango 3.
   – Se $k = -1$ la matrice A ha rango 2.

b) Per $k = 1$ null(A) $= 4 - 3 = 1$.

Ponendo $k = 1$ al termine della riduzione e considerando il sistema omogeneo associato otteniamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi il nucleo di A è l'insieme (spazio vettoriale):

$$\text{Sol}(\text{A}|0) = \{\ (-1, 0, 1, -1) \cdot \text{t} \mid \text{t} \in \mathbf{R}\ \}$$

□

Esercizio 4.12 (v. 7.93)**.** *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca per quali valori di k la matrice D è combinazione lineare di A, B e C. In tali casi si esprima D come combimazione lineare di A, B e C.

Soluzione:

Si tratta di risolvere l'equazione $xA + yB + zC = D$. Tale equazione si traduce nel seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + 2z = 6 \\ x + 4y + 9z = k - 2 \\ 2x + 4y + 10z = 2 \\ x + z = k + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 6 \\ 1 & 4 & 9 & | & k-2 \\ 2 & 4 & 10 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & k+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - I \\ IV - 1/2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 4 & 8 & | & k-5 \\ 0 & 4 & 8 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ 1/4III \\ II - III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzioni solo se $k = 1$, quindi D è combinazione lineare di A, B e C solo se $k = 1$ quando otteniamo:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 - 2t \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad D = (3-t)A + (-1-2t)B + C \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \text{se } k = 1.$$

□

Esercizio 4.13 (7.22)**.** *Siano dati i segunti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0, k^2+2, 3), \qquad v_4 \equiv (1, k+3, k^2+2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *al variare del parametro* k*.*

Soluzione:

Si tratta di stabilire se l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione.

Il vettore $xv_1 + yv_2 + zv_3$ è $\big(x + 2y,\ x + 7y + (k^2+2)z,\ x + 7y + 3z\big)$, quindi la precedente equazione si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 7y + (k^2+2)z = k + 3 \\ x + 7y + 3z = k^2 + 2 \end{cases}$$

Infine possiamo considerare la matrice associata a tale sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 7 & k^2+2 & | & k+3 \\ 1 & 7 & 3 & | & k^2+2 \end{bmatrix}$$

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$. Notiamo che potevamo passare direttamente dai vettori alla matrice $A|b$:

Un vettore v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$ se e solo se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$, dove A è la matrice che ha per colonne i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ e b è la matrice colonna formata da v_4.

Riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & k^2+2 & | & k+2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & k^2-k-1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il pivot della terza riga e distinguiamo i casi necessari.

- Se $k \neq \pm 1$ sia la matrice completa che quella incompleta hanno 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (una unica) soluzione. Di conseguenza v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = 1$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

- Se $k = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

$\square$