CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 3– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

Esercizio 3.1. *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x+4y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=2 \end{cases}$$

Soluzione:

A ogni sistema lineare associamo la matrice $A|b$, dove A è la matrice formata dai coefficienti delle incognite e b è la matrice dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x+4y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizzeremo il **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & | & \star \\ 0 & \star & \star & | & \star \\ 0 & 0 & \star & | & \star \end{bmatrix}$$

Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.

Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:

- Scambio di due righe della matrice.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} III \\ II \\ I \end{bmatrix}$$

- Sostituzione di una riga con un suo multiplo **non nullo**.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$

- Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ II+I \\ III \end{bmatrix}$$

- Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni che vedremo esplicitamente negli esercizi.

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII+bI \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$

  Notiamo in particolare la condizione $a \neq 0$, mentre non c'è nessuna condizione sul coefficiente b. In sostanza è necessario che il coefficiente della riga che stiamo sostituendo sia non nullo (in questo caso la seconda).

- Scambio di due colonne della matrice. In tale caso si scambia la posizione di due incognite. Al termine della riduzione, quando si ritorna al sistema, è quindi necessario ricordare lo scambio delle incognite. Per tale ragione useremo questo scambio solo se realmente conveniente.

Procediamo ora alla riduzione. Notiamo che la prima riga è l'unica che rimarrà invariata nella riduzione. Inoltre è la più utilizzata nelle operazioni di riduzione. Per queste ragioni è generalmente conveniente avere come prima riga quella più semplice (cioè con più zeri e senza parametri nel caso di sistemi parametrici).

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III+I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/3III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto la matrice è ridotta a gradini, possiamo quindi ritornare al sistema:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ -z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Notiamo che per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione abbiamo utilizzato per modificare una riga solo le combinazioni lineari con le righe che la precedono.

Seguiremo in generale questo principio, quindi, a parte gli scambi di righe,

- La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
- La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
- La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.
- ...

□

Esercizio 3.2. *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-3I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Torniamo ora al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ y + 4z + 2w = 0 \\ -2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15t \\ y = -8t \\ z = \dfrac{3}{2}t \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

L'insieme delle soluzioni scritte in forma vettoriale è quindi dato da

$$S = \left\{ (x, y, z, w) = \left(15, -8, \frac{3}{2}, 1\right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

□

Esercizio 3.3. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{bmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo la matrice a gradini.

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo la prima e la terza riga. Lo scopo di questa operazione è *spostare i parametri verso il basso.*

Se così non facessimo nella riduzione a gradini dovremmo necessariamente procedere nel seguente modo:

$$\begin{array}{c} \\ kII - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \\ 0 & 1 & 3-k & | & k \end{bmatrix}$$

Il sistema così ottenuto non è però equivalente a quello iniziale nel caso $k = 0$. Infatti per $k = 0$ abbiamo sostituito la seconda riga con la prima riga cambiata di segno, operazione non lecita. Nelle regole date inizialmente sulla sostituzione di una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga:

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII + bI \\ III \end{bmatrix}$$

era infatti richiesta la condizione $a \neq 0$ (notiamo invece che non c'è nessuna richiesta sul valore di b). Procedendo in questo modo dovremmo poi considerare il caso $k = 0$ separatamente, riprendendo la matrice precedente all'operazione non lecita.

Effettuiamo invece con lo scambio delle righe:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in questo caso l'operazione è lecita anche per $k = 0$ (quando in pratica lasciamo la terza riga invariata).

a) Utilizziamo il teorema di Rouchè-Capelli, distinguendo due casi
   - Se $k \neq \pm 2$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzione.
   - Se $k = \pm 2$, $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|b)$, quindi il sistema ammette soluzione.

   Infine il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Consideriamo separatamente i casi $k = \pm 2$.
   - Per $k = 2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t + 2 \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z = t \end{cases}$$

   - Per $k = -2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ -y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = -5t - 2 \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z = t \end{cases}$$

□

Esercizio 3.4. *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z & = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z & = 1 + 2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \mid & 1 \\ k+2 & 2 & 4 & \mid & 2 \\ 1+2k & 3 & 2 & \mid & 1+2k \end{bmatrix}$$

Poichè la prima colonna contiene il parametro k la scambiamo con la terza colonna (scambiando così la posizione dell'incognita x con quella dell'incognita z):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \mid & 1 \\ 4 & 2 & k+2 & \mid & 2 \\ 2 & 3 & 2k+1 & \mid & 1+2k \end{bmatrix}$$

Riduciamo ora la matrice a gradini:

$$\begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & k & \mid & 0 \\ 0 & 2 & 2k & \mid & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 2 & 2k & \mid & 2k \\ 0 & 0 & k & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli dobbiamo distinguere due casi

- Se $k \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

Tornando al sistema e ricordando lo scambio di x e z otteniamo:

$$\begin{cases} 2z + y + x = 1 \\ 2y + 2kx = 2k \\ kx = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo i due precedenti casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} z = \dfrac{1-k}{2} \\ y = k \\ x = 0 \end{cases}$$

- Se $k = 0$ invece

$$\begin{cases} 2z + y + x = 1 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 3.5. *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A_1. Visto che A_1 è ridotta a gradini è immediato calcolarne il rango utilizzando i pivot:
  - Se $t+1$ e $t-3$ sono non nulli, ovvero se $t \neq -1, 3$, allora A_1 ha tre pivot e $\text{rg}(A_1) = 3$.
  - Se $t = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-4II \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Quindi se $t = -1$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.

– Se $t = 3$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $t = 3$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.

- Anche se la matrice A_2 non è completamente ridotta a gradini possiamo comunque calcolarne il rango ragionando sui pivot.
  – Se $t \neq -1$ la matrice A_2 ha tre pivot e quindi $\text{rg}(A_2) = 3$. Notiamo che anche nei casi particolari $t = 3$ e $t = 0$ otteniamo una matrice con tre pivot, infatti:
    ∗ Se $t = 3$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
    ∗ Se $t = 0$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
  – Se $t = -1$ otteniamo la matrice

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 4II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $t = -1$ la matrice A_2 ha due pivot e $\text{rg}(A_2) = 2$.

- Riduciamo a gradini della matrice A_3:

$$\begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III - tI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & -4 & 1-t \\ 0 & 0 & -2t & -t^2 \end{bmatrix}$$

Se ragioniamo sui pivot otteniamo:
  – Se $t \neq 0$ la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A_3) = 3$.
  – Se $t = 0$ la matrice A_3 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi ha 2 pivot e $\text{rg}(A_3) = 2$.

□

Esercizio 3.6. *Siano $v, w \in \mathbf{R}^n$ vettori colonna. Dimostrare che la matrice $A = vw^T \in M_n(\mathbf{R})$ ha rango 0 oppure 1.*

Soluzione:
Siano $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w^T = (w_1, w_2, \dots w_n)$, allora vw^T è una matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_n \\ v_2w_1 & v_2w_2 & \dots & v_2w_n \\ \dots & & & \\ v_nw_1 & v_nw_2 & \dots & v_nw_n \end{bmatrix}$$

In sostanza ogni riga di A è un multiplo della riga formata da w^T. Se $v = 0$ o $w = 0$, allora anche la matrice A è nulla e $\text{rg}(A) = 0$, altrimenti A può essere ridotta nella matrice

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove la riga ottenuta è non nulla, quindi se $v \neq 0$ e $w \neq 0$ la matrice $A = vw^T$ ha rango 1.

□

Esercizio 3.7. *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$. Scambiamo la prima e quarta colonna di A e ricordando poi tale scambio prima di rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6k & | & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4k+1 & | & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III + 1/2I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Anche senza completare la riduzione siamo in grado di risponedere ad entrambe le domande.

a) La matrice A ha rango 3 per ogni valore di k, infatti i due termini $k - 1$ e $k + 2$ non si possono annullare contemporaneamente.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione se anche $rg(A|b) = 3$, cioè se $k = 1$. Infatti
   – Se $k = -2$ otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

   quindi $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$.
   – Se $k \neq -2, 1$, facendo un ulteriore passo di riduzione otteniamo la matrice

$$\begin{array}{r} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ (k+2)IV - (k-1)III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k+1 \end{bmatrix}$$

   Avendo supposto $k \neq -2, 1$, l'operazione effettuata è lecita e $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$.

   Infine, per $k = 1$, ricordando lo scambio di colonne, otteniamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w + 2y - z + 3x = \\ 2y + 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = t \\ w = -\frac{4}{3} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

   Infine le soluzioni del sistema sono gli elementi dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{4}{3} \right) + (0, 0, 1, 1)t \mid t \in \mathbf{R} \right\}.$$

□

Esercizio 3.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = t - 2 \\ tx_1 + (t-4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-2t)x_2 = 2t - 4 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di t il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di t che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ t & t-4 & | & 0 \\ 2 & 2-2t & | & 2t-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - tI \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ 0 & 2t-4 & | & -t^2+2t \\ 0 & 4-2t & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ 0 & 2t-4 & | & -t^2+2t \\ 0 & 0 & | & -t^2+2t \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $-t^2 + 2t = 0$ se $t = 0$ o $t = 2$, e che $2t - 4 = 0$ se $t = 2$. Di conseguenza:
   - Se $t \neq 0, 2$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è compatibile.
   - Se $t = 0$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema è compatibile, e ammette una soluzione.
   - Se $t = 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ quindi il sistema è compatibile, e ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $t = 0$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ -4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Se $t = 2$ il sistema si riduce alla sola equazione $x_1 - x_2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 3.9. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) *Si calcoli il rango di A.*
b) *Si stabilsca per quali valori di k il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 3/2I \\ III + 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k+1 \\ 0 & k+2 & 2k+4 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice A ha rango 3 se $k \neq 1, -2$, ha rango 2 se $k = 1$ e ha rango 1 se $k = -2$.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$ se la matrice dei coefficienti ha rango 3 nel qual caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ per ogni $b \in \mathbf{R}^3$, ovvero se $k \neq 1, -2$.

□

Esercizio 3.10. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k + 3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k + 9 \\ x - 4y - 2z = k - 2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione e per quali k ne ammette infinite.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ -2 & 6 & k+7 & | & 2k+9 \\ 1 & -4 & -2 & | & k-2 \\ 3 & -6 & k-7 & | & k^2-k-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+I \\ IV+3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 1 & | & 2k+1 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III+II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2-4=0$ se $k=\pm 2$, e che $k+2=0$ se $k=-2$. Di conseguenza:
   – Se $k \neq \pm 2$ allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ quindi il sistema non ammette soluzione.
   – Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette una unica soluzione.
   – Se $k = -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k = 2$:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=5 \\ 2y+3z=3 \\ 4z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

Consideriamo il caso $k=-2$:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=1 \\ 2y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8t-10 \\ y=t \\ z=2t-3 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

□