

## CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

APPLICAZIONI LINEARI – GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2011/12

---

Una **Applicazione lineare**  $T : V \rightarrow W$  è una funzione tra due spazi vettoriali che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \\T(\lambda v) &= \lambda T(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

In particolare se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  e  $v \in V$ , allora:

$$T(v) = T(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + \dots + x_n T(v_n)$$

---

A ogni applicazione lineare può essere associata una **matrice**  $A = M(T)$  che ha per colonne le immagini degli elementi di una base di  $V$ , espresse rispetto a una base di  $W$ . Salvo indicazioni le basi di  $V$  e  $W$  sono le basi canoniche. Usando la matrice associata

$$T(v) = A \cdot v \quad \forall v \in V$$

---

Una applicazione lineare può essere definita tramite:

- La regola, cioè l'immagine del generico elemento:  
 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$

- Le immagini di una base:  
 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$\begin{aligned}T(e_1) &= (1, 2, 1) \\T(e_2) &= (1, 0, -1)\end{aligned}$$

- La matrice associata rispetto a una base:  
 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che la matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se non è specificato, la matrice si intende sempre associata rispetto alle basi canoniche.

Le tre precedenti definizioni definiscono la stessa applicazione lineare.

---

L'**Immagine**  $\text{Im}(T)$  di una applicazione lineare  $T : V \rightarrow W$  è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  di  $V$ :

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle \subseteq W$$

Utilizzando la matrice  $A = M(T)$  associata:

- $\text{Im}(T)$  = spazio generato dalle colonne di  $A$  (Prestare attenzioni se le basi di  $V$  e  $W$  non sono quelle canoniche)
- $\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{ \text{colonne linearmente indipendenti di } A \}$  (Prestare attenzioni se le basi di  $V$  e  $W$  non sono quelle canoniche).
- $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A)$

Il **Nucleo**  $\ker(T)$  di una applicazione lineare  $T : V \rightarrow W$  è il sottospazio di  $V$  formato dagli elementi la cui immagine è lo 0:

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V$$

Utilizzando la matrice  $A$  associata:

- $\ker(T) = \{ \text{soluzioni del sistema omogeneo associato a } A \}$  (Prestare attenzione se le basi di  $U$  e di  $V$  non sono quelle canoniche).
  - $\dim(\ker(T)) = n - \text{rg}(A)$ , dove  $n = \dim(V) = \text{numero delle incognite del sistema lineare}$ .
- 

- Il teorema di **Nullità più rango** afferma che se  $T : V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare, allora

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = n = \dim(V)$$

- Una applicazione è detta **Iniettiva** se  $\dim(\ker(T)) = 0$ , cioè se  $\ker(T) = \{0\}$ .
  - Una applicazione è detta **Suriettiva** se  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$ , cioè se  $\text{Im}(T) = W$ .
  - Una applicazione è detta **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Un'applicazione è invertibile sse è biiettiva.
- 

Bisogna prestare particolare attenzione quando l'applicazione non è definita sulle basi canoniche.