PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE* – D – 13/4/2012

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. ORG.

Per lo svolgimento completo degli esercizi si veda la fila A.

Esercizio 0.1. *Si considerino i punti* $A = (1, 0, -1)$, $B = (-4, 1, 1)$ *e* $C = (-1, 1, 0)$.

a) *Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B *e del piano* π *contenente* r *e* C.
b) *Si determini la distanza di* r *dall'origine.*
c) *Si determini la distanza di* π *dall'origine.*

Soluzione:

Soluzione:

a) La retta r ha direzione $\overrightarrow{AB} = (-5, 1, 2)$, quindi ha equazioni

$$r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo π come il piano passante per A, B e C. Poiché $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$, otteniamo le equazioni

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - 5t - 2s \\ y = t + s \\ z = -1 + 2t + s \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x - y + 3z = -2$$

b) Per calcolare la distanta di r dall'origine, determiniamo il piano π_0 perpendicolare a r e passante per l'origine. Quindi, indicata con P l'intersezione tra π_0 e r, la distanza di r dall'origine equivale alla lunghezza del segmento OP. Poiché π_0 ha equazione $-5x + y + 2z = 0$, otteniamo

$$P = \pi_0 \cap r = \left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{30}, -\frac{8}{15}\right) \qquad \Rightarrow \qquad d(O, r) = \overline{OP} = \frac{\sqrt{330}}{30}$$

c) Per determinare la distanza del piano π dall'origine possiamo usare direttamente la formula

$$d(\pi, O) = \frac{|\,2\,|}{\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

In alternativa possiamo determinare la retta r_0 passante per l'origine e perpendicolare a P. Indicato con Q il punto di intersezione tra tale retta r_0 e il piano π, la distanza di r dall'origine equivale alla distanza di P da O.

La direzione ortogonale a π è $\overrightarrow{v} = (1, -1, 3)$, quindi

$$r_0: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \pi \cap r_0 = \left(-\frac{2}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{6}{11}\right)$$

Infine

$$d(O, \pi) = \overline{OQ} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

□

Esercizio 0.2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & k^2 - 2k + 4 & k - 4 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale}$$

a) *Si calcoli il rango di* A *al variare di* k *in* $\mathbf{R}$
b) *Dato* $b = (0, 2, k - 2)$, *si risolva il sistema* $Ax = b$ *al variare di* k.

c) *Esistono valori di k per cui il sistema $Ax = c$ non ammette mai soluzione, qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$? Si giustifichi la risposta.*

Soluzione:
Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & | & 2 \\ -2 & 0 & k^2-2k+4 & k-4 & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & k^2-2k & k-2 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

a) I possibili pivot $k^2 - 2k$ e $k - 2$, si annullano rispettivamente per $k = 0$ o $k = 2$ e per $k = 2$. Di conseguenza
   – Se $k \neq 2$, la matrice A ha rango 3.
   – Per $k = 2$, la matrice A ha rango 2.

b) Scegliendo in maniera opportuna i parametri, per risolvere il sistema $A|b$ è sufficiente distinguere due casi.
   – Se $k \neq 2$, dividendo la terza riga per $k - 1$, otteniamo facilmente le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2t + kt \\ x_2 = -1 - kt \\ x_3 = t \\ x_4 = 1 - kt \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, -1, 0, 1) + (k + 2, -k, 1, -k)t \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

   – Per $k = 2$ otteniamo le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = 2t - s \\ x_2 = -2 + s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -2, 0, 0) + (2, 0, 1, 0)t + (-1, 1, 0, 1)s \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

c) Notiamo che se $k \neq 2$, allora la matrice A ha rango massimo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|c) = 3$ qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$, quindi il sistema $Ax = c$ ammette sempre soluzione. Se $k = 2$ il sistema $Ax = c$ ammette o non ammette soluzione a seconda del valore di $c \in \mathbf{R}^3$. Abbiamo però visto che se $c = b$ il sistema ammette soluzione; analogamente se $c = 0$ otteniamo un sistema omogeneo che quindi ammette soluzione.
   In conclusione, non esistono valori di k per cui il sistema $Ax = c$ non ammette mai soluzione, qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$.

□

Esercizio 0.3. *Cos'è il* prodotto misto *di tre vettori geometrici dello spazio? Descrivere la relazione tra tale prodotto e il volume definito da tre vettori e dare un esempio.*

Esercizio 0.4. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ k & 2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & k^2+k+2 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} k & 4k \\ k & 2k \end{bmatrix},$$

con k parametro reale.

a) *Si stabilisca per quali valori di k la matrice E è combinazione lineare di A, B, C e D.*
b) *Posto $K = 1$, si esprima E come combinazione lineare di A, B, C e D.*

Soluzione:

Si tratta di impostare l'equazione $xA + yB + zC + wD = E$, che si esplicita nel sistema a cui è associata la matrice

$$M|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & | & k \\ 3 & k & 5 & 6 & | & 4k \\ 0 & k & k & 0 & | & k \\ 1 & 0 & 2 & k^2+k+2 & | & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-3I \\ \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & | & k \\ 0 & k & -1 & 0 & | & k \\ 0 & k & k & 0 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & | & k \\ 0 & k & -1 & 0 & | & k \\ 0 & 0 & k+1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k & | & k \end{bmatrix}$$

a) Notiamo innanzitutto che se $k \neq 0, -1$, allora $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|b) = 4$, quindi il sistema ha soluzione e la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D. Se $k = 0$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|b) = 3$ quindi il sistema ha soluzione e la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D. Per $k = -1$ invece $\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M|b) = 3$, quindi il sistema non ha soluzione e la matrice E non è combinazione lineare di A, B, C, D.

Infine, la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D se $k \neq -1$.

b) Posto $k = 1$ risolviamo il sitema $Mx = b$:

$$\begin{cases} x + 2z + 2w = 1 \\ y - z = 1 \\ z = 0 \\ 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ w = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \qquad E = B + \frac{1}{2}D$$

□

Esercizio 0.5. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dagli elementi*

$$v_1 = (-2, 0, -2, 0), \quad v_2 = (1, 1, 2, 1), \quad v_3 = (2, 1, 3, 1).$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = (1, k, -1, k)$ appartiene a W.*
b) *Si determini se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.*

Soluzione:

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ ha soluzione, mentre per rispondere alla seconda domanda dobbiamo stabilire le soluzioni dell'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata alla prima equazione.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ -2 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -2-k \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ha soluzione solo se $k = -2$, quindi v è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 per $k = -2$.
b) Se consideriamo solo la matrice dei coefficienti, associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, vediamo che la matrice ha rango 2, quindi l'equazione ha infinite soluzioni e i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti

□

Esercizio 0.6. *Cos'è un insieme di vettori* linearmente dipendenti *di uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*