

Esercizio 0.1. Si considerino i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, -1, -2)$ e $C = (0, 1, 2)$.

- Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B e del piano π contenente r e C .
- Si determini la distanza di r dall'origine.
- Si determini la distanza di π dall'origine.

SOLUZIONE:

SOLUZIONE:

- a) La retta r ha direzione $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -2)$, quindi ha equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo π come il piano passante per A, B e C . Poiché $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$, otteniamo le equazioni

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 1 - 2t \\ z = -2t + 2s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y + z = 1$$

- b) Per calcolare la distanza di r dall'origine, determiniamo il piano π_0 perpendicolare a r e passante per l'origine. Quindi, indicata con P l'intersezione tra π_0 e r , la distanza di r dall'origine equivale alla lunghezza del segmento OP . Poiché π_0 ha equazione $-2y - 2z = 0$, otteniamo

$$P = \pi_0 \cap r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = -2t \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = -2t \\ 1 - 2t - 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Quindi

$$d(O, r) = \overline{OP} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

- c) Per determinare la distanza del piano π dall'origine possiamo usare direttamente la formula

$$d(\pi, O) = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

In alternativa possiamo determinare la retta r_0 passante per l'origine e perpendicolare a P . Indicato con Q il punto di intersezione tra tale retta r_0 e il piano π , la distanza di r dall'origine equivale alla distanza di P da O .

La direzione ortogonale a π è $\vec{v} = (2, -1, 1)$, quindi

$$r_0 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

$$Q = \pi \cap r_0 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \\ 4t + t + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{6} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow Q = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

Infine

$$d(O, \pi) = \overline{OQ} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

□

Esercizio 0.2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & k^2 + k + 2 & k + 3 \end{bmatrix} \quad k \text{ parametro reale}$$

- Si calcoli il rango di A al variare di k in \mathbf{R}
- Dato $b = (0, 2, k + 1)$, si risolva il sistema $Ax = b$ al variare di k .
- Esistono valori di k per cui il sistema $Ax = c$ non ammette mai soluzione, qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$? Si giustifichi la risposta.

SOLUZIONE:

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|b$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & k^2 + k + 2 & k + 3 & k + 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} II - I \\ III - 2I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k^2 + k & k + 1 & k + 1 \end{array} \right]$$

- I possibili pivot $k^2 + k$ e $k + 1$ si annullano rispettivamente per $k = 0$ o $k = -1$ e per $k = -1$. Di conseguenza
 - Se $k \neq -1$, la matrice A ha rango 3.
 - Per $k = -1$, la matrice A ha rango 2.
- Scegliendo in maniera opportuna i parametri, per risolvere il sistema $A|b$ è sufficiente distinguere due casi.
 - Se $k \neq -1$, dividendo la terza riga per $k + 1$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ kx_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - t + kt \\ x_2 = 1 + kt \\ x_3 = t \\ x_4 = 1 - kt \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 1, 0, 1) + (k - 1, k, 1, -k)t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- Per $k = -1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t - s \\ x_2 = 2 - s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0) + (-1, 0, 1, 0)t + (-1, -1, 0, 1)s \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

- Notiamo che se $k \neq -1$, allora la matrice A ha rango massimo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|c) = 3$ qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$, quindi il sistema $Ax = c$ ammette sempre soluzione. Se $k = -1$ il sistema $Ax = c$ ammette o non ammette soluzione a seconda del valore di $c \in \mathbf{R}^3$. Abbiamo però visto che se $c = b$ il sistema ammette soluzione; analogamente se $c = 0$ otteniamo un sistema omogeneo che quindi ammette soluzione.

In conclusione, non esistono valori di k per cui il sistema $Ax = c$ non ammette mai soluzione, qualsiasi sia $c \in \mathbf{R}^3$.

□

Esercizio 0.3. Dare la definizione di prodotto scalare di due vettori geometrici dello spazio. Descrivere la relazione tra il prodotto scalare e l'angolo tra vettori. Illustrare con esempi.

Esercizio 0.4. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & k+4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ k-2 & k+1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & k^2-2k \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} k & 2k \\ 0 & 2k \end{bmatrix},$$

con k parametro reale.

- a) Si stabilisca per quali valori di k la matrice E è combinazione lineare di A, B, C e D .
 b) Posto $k = 1$, si esprima E come combinazione lineare di A, B, C e D .

SOLUZIONE:

Si tratta di impostare l'equazione $xA + yB + zC + wD = E$, che si esplicita nel sistema a cui è associata la matrice

$$M|b = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & k \\ 2 & k+4 & 6 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & k-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k+1 & k^2-2k & 2k \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} II - 2I \\ IV - I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & k \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & k^2-2k & k \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$IV - III \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & k \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-2k & k \end{array} \right]$$

- a) Notiamo innanzitutto che se $k \neq 0, 2$, allora $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|b) = 4$, quindi il sistema ha soluzione e la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D . Se $k = 0$ otteniamola matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

quindi anche in questo caso $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|b)$, il sistema ha soluzione e la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D . Per $k = 2$ invece $\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M|b) = 3$, quindi il sistema non ha soluzione e la matrice E non è combinazione lineare di A, B, C, D .

Infine, la matrice E è combinazione lineare di A, B, C, D se $k \neq 2$.

- b) Posto $k = 1$ risolviamo il sistema $Mx = b$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + w = 0 \\ -z = 0 \\ -w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ w = -1 \end{cases} \Rightarrow E = -2A + B - D$$

□

Esercizio 0.5. Sia W il sottospazio di \mathbf{R}^4 generato dagli elementi

$$v_1 = (-2, 1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 2, 1), \quad v_3 = (1, 0, 1, 0)$$

- a) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = (1, k, 2, k)$ appartiene a W .
 b) Si determini se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

SOLUZIONE:

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ ha soluzione, mentre per rispondere alla seconda domanda dobbiamo stabilire le soluzioni dell'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$.

0. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata alla prima equazione.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} 2II + I \\ IV - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2k+1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow III - II \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- a) Il sistema ha soluzione solo se $k = \frac{1}{2}$, quindi v è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 per $k = \frac{1}{2}$.
 b) Se consideriamo solo la matrice dei coefficienti, associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, vediamo che la matrice ha rango 2, quindi l'equazione ha infinite soluzioni e i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti

□

Esercizio 0.6. *Cos'è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per un sottospazio di \mathbf{R}^3 e per uno spazio di matrici.*