GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE – A – 30/08/2012

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. ORG.

Esercizio 0.1. *Si consideri la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 2k & 0 & -4 & k \\ 4 & 0 & k & 2 \\ 0 & -k & -k & 2 \\ k & 2 & 0 & k \end{bmatrix}$$

a) *Si calcoli il rango di M al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Stabilire per quali valori di k la matrice M è invertibile.*

Soluzione:

a) La cosa più semplice probabilmente è cominciare a calcolare il determinante di M. Sviluppando rispetto alla seconda colonna otteniamo:

$$\begin{aligned} \det(M) &= k \cdot \left[k(-8-k^2) + k(2k^2+16)\right] + 2\left[k(4k-4k) + 2(2k^2+16)\right] = \\ &= k^4 + 16k^2 + 64 = (k^2+8)^2 \end{aligned}$$

Poichè $k^2 + 8 \neq 0$ per ogni k reale, la matrice M ha sempre determinante diverso da zero e quindi $\text{rg}(M) = 4, \quad \forall k \in \mathbf{R}$.

b) La matrice ha determinante diverso da zero, ovvero ha rango massimo, per ogni k, quindi M è invertibile per ogni $k \in \mathbf{R}$.

$\square$

Esercizio 0.2. *Si consideri l'insieme S così definito:*

$$S = \left\{(a+b-c-d,\ 2b+c+3d,\ -3a-5b+4c,\ 2a-c+d) \in \mathbf{R}^4 \mid a,b,c,d \in \mathbf{R}\right\}$$

a) *Si verifichi che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Si determini la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

Il generico elemento u dell'insieme S si può scrivere nella forma:

$$u = a \cdot (1,0,-3,2) + b \cdot (1,2,-5,0) + c \cdot (-1,1,4,-1) + d \cdot (-1,3,0,1)$$

con $a,b,c,d \in \mathbf{R}$.
Chiamiamo

$$v_1 = (1,0,-3,2), \qquad v_2 = (1,2,-5,0), \qquad v_3 = (-1,1,4,-1), \qquad v_4 = (-1,3,0,1).$$

a) Per quanto osservato prima S è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori v_1, v_2, v_3 e v_4, ovvero S è li sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ generato da tali vettori: $S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Per dimostrarlo esplicitamente, siano $u_1 = a_1v_1 + b_1v_2 + c_1v_3 + d_1v_4$ e $u_2 = a_2v_1 + b_2v_2 + c_2v_3 + d_2v_4$ due qualsiasi elementi di S e sia $\lambda \in \mathbf{R}$:

– SOMMA.

$$u_1 + u_2 = (a_1+a_2)v_1 + (b_1+b_2)v_2 + (c_1+c_2)v_3 + (d_1+d_2)v_4,$$

che è ancora una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 e v_4, ovvero un elemento di S. Quindi S è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI.

$$\lambda\, u_1 = (\lambda a_1)v_1 + (\lambda b_1)v_2 + (\lambda c_1)v_3 + (\lambda d_1)v_4$$

che è ancora una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 e v_4, ovvero un elemento di S. Quindi S è chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+3I \\ IV-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza $\text{rg}(M) = 4$, quindi i quattro vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \qquad \dim(S) = 4$$

Notiamo che essendo S di dimensione 4, coincide con tutto lo spazio $\mathbf{R}^4$, quindi qualsiasi base di $\mathbf{R}^4$, in particolare quella canonica, può essere presa come base di S.

$\square$

Esercizio 0.3. *Dare la definizione di* indipendenza linare *per vettori di uno spazio vettoriale. Illustrare con un esempio con vettori di* $\mathbf{R}^4$ *e un esempio con matrici* 2×2.

Esercizio 0.4. *Sia* $T : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_1[x]$ *la funzione lineare tale che:*

$$T(x^2) = 0, \qquad T(x+2) = 1, \qquad T(1) = 2x.$$

a) *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(T)$ *associata a* T *rispetto alle basi* $\mathcal{E} = \left\{x^2, x, 1\right\}$ *e* $\mathcal{E}' = \{x, 1\}$.
b) *Si stabilisca se* T *è iniettiva e/o suriettiva.*

Soluzione:

a) Dalla linearità di T otteniamo che $T(x+2) = T(x) + 2\,T(1)$, quindi $T(x) = T(x+2) - 2\,T(1) = -4x + 1$. Di conseguenza le immagini degli elementi della base $\mathcal{E}$ sono:

$$T(x^2) = 0 = (0,0)_{\mathcal{E}'}, \qquad T(x) = -4x + 1 = (-4, 1)_{\mathcal{E}'}, \qquad T(1) = 2x = (2,0)_{\mathcal{E}'}$$

e la matrice cercata è

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(T) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) La matrice M ha rango 2, quindi:
   - $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M) = 2 = \dim(\mathbf{R}_1[x])$ e T è suriettiva.
   - $\dim(\text{N}(T)) = \dim(\mathbf{R}_2[x]) - \text{rg}(M) = 3 - 2 = 1$ e T non è iniettiva.

$\square$

Esercizio 0.5. *Sia* A *la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare gli autovalori di* A.
b) *Determinare basi degli autospazi di* A *al variare del parametro reale* t.

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (-1 - \lambda)\left[(t - \lambda)^2 - 1\right]$$

Notiamo che $(t - \lambda)^2 - 1 = 0$ se $t - \lambda = \pm 1$, ovvero $\lambda = t \pm 1$. Di conseguenza gli autovalori di T sono $\lambda = -1$ e $\lambda = t \pm 1$.

In particolare se $t \neq 0, -2$, si tratta di tre autovalori distinti, altrimenti:
   - Se $t = 0$, l'autovalore $\lambda = -1 = t - 1$ è doppio e $\lambda = t + 1 = 1$ è singolo.
   - Se $t = -2$, l'autovalore $\lambda = -1 = t + 1$ è doppio e $\lambda = t - 1 = -3$ è singolo.

b) Calcoliamo gli autospazi.

$$E(-1) = \text{N}(A + I) : \left[\begin{array}{ccc|c} t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t+1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t+1 & 0 \\ t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$II - (t+1)I \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & -t^2 - 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Coerentemente con le osservazioni sulle molteplicità geometriche degli autovalori fatte precedentemente, dobbiamo distinguere tre casi.

– Se $t \neq 0, -2$ otteniamo la soluzione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \qquad \forall s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \ \mathcal{B}\left(E(-1)\right) = \{(0,1,0)\}$$

– Se $t = 0$ otteniamo la soluzione:

$$\begin{cases} x = -h \\ y = s \\ z = h \end{cases} \qquad \forall h, s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \ \mathcal{B}\left(E(-1)\right) = \{(0,1,0),\ (-1,0,1)\}$$

– Se $t = -2$ otteniamo la soluzione:

$$\begin{cases} x = h \\ y = s \\ z = h \end{cases} \qquad \forall h, s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \ \mathcal{B}\left(E(-1)\right) = \{(0,1,0),\ (1,0,1)\}$$

Calcoliamo gli altri autospazi.

$$E(t+1) = \mathrm{N}(A-(t+1)I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2-t & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2-t & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Coerentemente con quanto ottenuto per $E(-1)$ dobbiamo distinguere due casi.

– Se $t \neq -2$ otteniamo la soluzione:

$$\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \qquad \forall s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \ \mathcal{B}\left(E(t+1)\right) = \{(1,0,1)\}$$

– Se $t = -2$ otteniamo la soluzione:

$$\begin{cases} x = s \\ y = h \\ z = s \end{cases} \qquad \forall h, s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \ \mathcal{B}\left(E(t+1)\right) = \mathcal{B}\left(E(-1)\right) = \{(0,1,0),\ (1,0,1)\}$$

Infine calcoliamo l'ultimo autospazio.

$$E(t-1) = \mathrm{N}(A-(t-1)I) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -t & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -t & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Distinguiamo due casi.

– Se $t \neq 0$ otteniamo la soluzione:

$$\begin{cases} x = -s \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \qquad \forall s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \ \mathcal{B}\left(E(t-1)\right) = \{(-1,0,1)\}$$

– Se $t = 0$ otteniamo la soluzione:

$$\begin{cases} x = -s \\ y = h \\ z = s \end{cases} \qquad \forall h, s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \ \mathcal{B}\left(E(t-1)\right) = \mathcal{B}\left(E(-1)\right) = \{(0,1,0),\ (-1,0,1)\}$$

□

Esercizio 0.6. *Cos'è una* matrice ortogonale*? Che relazione c'è tra matrici ortogonali e basi ortonormali? Dare un esempio nel caso* 2×2.