GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE – D – 28/06/2012

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. ORG.

Esercizio 0.1. *Si considerino il fascio di piani $\pi_k:\ 2x+2y+z=k$, con k parametro reale, e la retta r di equazioni*

$$r:\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-2t \\ z=-2 \end{cases} \qquad \forall t\in\mathbf{R}$$

a) *Si stabilisca per quali k la retta r appartiene a π_k.*
b) *Dato il punto $A(1,1,1)$, si determinino equazioni cartesiane e parametriche del piano π' perpendicolare a r e passante per A e della retta r' perpendicolare a π_k e passante per A.*
c) *Si detrminino le equazioni della retta parallela a π_k e perpendicolare a r passante per l'origine.*

Soluzione:

a) Perché r appartenga a π_k, le coordinate del generico punto di r devono soddisfare l'equazione di π_k, quindi, sostituendo:

$$2(1+2t)+2(3-2t)-2=k \qquad \Rightarrow \qquad 6=k$$

Di conseguenza r appartiene a π_k per $k=6$.

b) La direzione ortogonale a π_k è $(2,2,1)$, quindi r' ha equazioni:

$$r':\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ x-2z=-1 \end{cases}$$

La retta r è parallela a $(2,-2,0)$, ovvero a $(1,-1,0)$, quindi il piano ortogonale a r per A ha equazioni

$$\pi':\ x-y=0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=s \\ y=s \\ z=t \end{cases} \quad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

c) Una retta passante per l'origine e parallela a π_k appartiene al piano parallelo a π_k passante per l'origine, di equazione $2x+2y+z=0$. Analogamente una retta passante per l'origine e perpendicolare a r appartiene al piano ortogonale a r passante per l'origine, di equazione $x-y=0$. Di conseguenza la retta cercata è data dall'intersezione di tali piani:

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-4t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

□

Esercizio 0.2. *Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbf{R}_3[x]$:*

$$p_1(x)=x^3+x, \qquad p_2(x)=x^2-1, \qquad p_3(x)=3x^3-x^2+(k+7)x+1 \qquad p_4(x)=(k+4)x+k^2+4k$$

con k parametro reale, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}_3[x]$ generato da $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ e $p_4(x)$.

a) *Si stabilisca per quali k il polinomio $p(x)=2x^3+2x+k$ appartiene a V. Posto $k=-3$ si scriva esplicitamente $p(x)$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ e $p_4(x)$.*
b) *Si determini la dimensione e una base di V.*

Soluzione:

Ad ogni polinomio possiamo associare le sue coordinate rispetto alla base canonina $\left\{x^3, x^2, x, 1\right\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$\begin{aligned}
&p_1(x) = x^3 + x && \rightarrow \quad p_1 = (1, 0, 1, 0)\\
&p_2(x) = x^2 - 1 && \rightarrow \quad p_2 = (0, 1, 0, -1)\\
&p_3(x) = 3x^3 - x^2 + (k+7)x + 1 && \rightarrow \quad p_3 = (3, -1, k+7, 1)\\
&p_4(x) = (k+4)x + k^2 + 4k && \rightarrow \quad p_4 = (0, 0, k+4, k^2+4k)\\
&p(x) = 2x^3 + 2x + k && \rightarrow \quad p = (2, 0, 2, k)
\end{aligned}$$

Si tratta quindi di stabilire se il vettore p appartiene al sottospazio $V' = \langle p_a, p_2, p_3, p_4\rangle$ di $\mathbf{R}^4$ e di determinare la dimensione e una base di take sottospazio.
Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|p$:

$$A|p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & k+7 & k+4 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & k^2+4k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+4 & k+4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2+4k & | & k \end{bmatrix}$$

a) Il vettore p appartiene a V', e quindi il polinomio $p(x)$ appartiene a V, se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p)$. I possibili pivot di A si annullano per $k = 0$ o $k = -4$. Notiamo però che per $k = 0$ si ha $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 3$, mentre per $k = -4$ si ha $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|p) = 3$. Per $k \neq 0, -4$, infine, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 4$. Di conseguenza il sistema ammette soluzione, ovvero $p(x)$ appartiene a V, se e solo se $k \neq -4$.
Ponendo $k = -3$ nella matrice ridotta otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 3z = 2 \\ y - z = 0 \\ z + w = 0 \\ -3w = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = -1 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \qquad p(x) = 5p_1(x) - p_2(x) - p_3(x) + p_4(x)$$

b) Consideriamo solo la matrice dei coefficienti, di cui abbiamo già studiato il rango:
– Se $k \neq 0, -4$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 4$ e una sua base è

$$\mathcal{B} = \{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}.$$

– Se $k = 0$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una sua base è

$$\mathcal{B} = \left\{p_1(x) = x^3 + x,\ p_2(x) = x^2 - 1,\ p_3(x) = 3x^3 - x^2 + 7x + 1\right\}.$$

– Se $k = -4$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$ e una sua base è

$$\mathcal{B} = \left\{p_1(x) = x^3 + x,\ p_2(x) = x^2 - 1\right\}.$$

□

Esercizio 0.3. *Dare la definizione di* spazio vettoriale reale. *Dare un esempio di sottoinsieme di* $\mathbf{R}^4$ *che* non *è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di* $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 0.4. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(e_1) = (-1, 0, 1), \qquad T(e_2) = (0, k-1, 0), \qquad T(e_3) = (1, k+1, k+4), \qquad T(e_4) = (3, 1, -3)$$

e sia $v = (3, 0, k-4)$, *con* k *parametro reale.*

a) *Si stabilisca per quali* k *l'applicazione* T *è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Si determinino basi di nucleo e immagine di* T *al variare di* k.
c) *Si stabilisca per quali* k *il vettore* v *appartiene all'immagine di* T.

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & k-1 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & k+4 & -3 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande ridiciamo a gradini la matrice $M|v$:

$$M|v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & k-1 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & k+4 & -3 & | & k-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & k-1 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+5 & 0 & | & k-1 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice M. L'applicazione T è suriettiva se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = \dim(\mathbf{R}^3) = 3$, mentre T è iniettiva se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(M) = 0$.

I possibili pivot di M si annullano per $k = -5$ o $k = 1$. Notiamo però che per $k = -5$ si ha $\mathrm{rg}(M) = 2$, mentre per $k = 1$ il rango di M resta comunque massimo, $\mathrm{rg}(M) = 3$. Di conseguenza T è suriettiva se e solo se $k \neq -5$, quando $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 3$.

Notiamo che in ogni caso $\mathrm{rg}(M) \leq 3$, quindi $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(M) \geq 1$ e T non è iniettiva per nessun valore di k.

b) È sufficiente distinguere due casi:

– Se $k \neq -5$, abbiamo visto che T è suriettiva quindi $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ e una sua base è una qualsiasi base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ e una possibile base è

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1) = (-1,0,1),\ T(e_3) = (1,k+1,k+4),\ T(e_4) = (3,1,-3)\}.$$

Notiamo che l'insieme $\{T(e_1) = (-1,0,1),\ T(e_2) = (0,k-1,0),\ T(e_3) = (1,k+1,k+4)\}$ non è una base per $k = 1$, infatti contiene il vettore nullo, mentre potrebbe essere presa come base per $k \neq 1, -5$.

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:

$$\begin{cases} -x + z + 3w = 0 \\ (k-1)y + (k+1)z + w = 0 \\ (k+5)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (3-3k)t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = (1-k)t \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo è

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(3-3k, 1, 0, 1-k)\}, \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 1$$

– Se $k = -5$ abbiamo osservato al punto precedente che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 2$. Inoltre una sua base è

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1) = (-1,0,1),\ T(e_2) = (0,-6,0)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:

$$\begin{cases} -x + z + 3w = 0 \\ -6y - 4z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13t + 18s \\ y = s \\ z = t \\ w = 6s + 4t \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo è

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(18,1,0,6),\ (13,0,1,4)\}, \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 2$$

c) Abbiamo già osservato che per $k \neq -5$ l'endomorfismo T è suriettivo, quindi in tali casi v appartiene all'immagine di T, che coincide con tutto $\mathbf{R}^3$. Infatti per $k \neq -5$, si ha $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v) = 3$.

Per $k = -5$, invece, $\mathrm{rg}(M) = 2 \neq \mathrm{rg}(M|v) = 3$, quindi v non appartiene all'immagine di T.

□

Esercizio 0.5. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se T è diagonalizzabile.*
b) *Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T.*
c) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.*

Soluzione:

a) L'endomorfismo T è sicuramente diagonalizzabile perché la matrice M associata a T rispetto alla base canonica, che è ortonormale, è simmetrica.
b) Il polinomio caratteristico di T è

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (7-\lambda)(7-\lambda)\left[(3-\lambda)^2-49\right] - 3\cdot 3\left[(3-\lambda)^2-49\right] \\ &= (\lambda^2-6\lambda-40)(\lambda^2-14\lambda+40) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di T sono $\lambda = 10$, doppio, e $\lambda = \pm 4$, singoli.

Calcolando gli autospazi otteniamo:

$$\begin{aligned} E(10) &= \mathrm{N}(M-10I) = \langle (1,1,0,0),\ (0,0,1,1)\rangle \\ E(4) &= \mathrm{N}(M-4I) = \langle (1,-1,0,0)\rangle \\ E(-4) &= \mathrm{N}(M+4I) = \langle (0,0,1,-1)\rangle \end{aligned}$$

I generatori degli autospazi trovati sono tutti tra loro ortogonali, quindi una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ si ottiene normalizzando tali vettori:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right),\ \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right),\ \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

c) Per definizione di autovettore, la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Infatti, per esempio,

$$T(v_1) = T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) = \lambda v_1 = 10v_1 = 10v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 = (10,0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

Risultati analoghi si ottengono per gli altri autovettori.

□

Esercizio 0.6. *Cosa sono le* coordinate *dei vettori rispetto ad una base di uno spazio vettoriale? Dare degli esempi per un sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *e per uno spazio di matrici.*