GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE – C – 28/06/2012

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETT. TEL. E ING. ORG.

Esercizio 0.1. *Si considerino il fascio di piani* $\pi_k : \; 2x + y - z = k$, *con* k *parametro reale, e la retta* r *di equazioni*

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 \\ z = 1 + 6t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si stabilisca per quali* k *la retta* r *appartiene a* π_k.
b) *Dato il punto* $A(1, 1, 1)$, *si determinino equazioni cartesiane e parametriche del piano* π' *perpendicolare a* r *e passante per* A *e della retta* r' *perpendicolare a* π_k *e passante per* A.
c) *Si detrminino le equazioni della retta parallela a* π_k *e perpendicolare a* r *passante per l'origine.*

Soluzione:

a) Perché r appartenga a π_k, le coordinate del generico punto di r devono soddisfare l'equazione di π_k, quindi, sostituendo:

$$2(2 + 3t) + 5 - (1 + 6t) = k \qquad \Rightarrow \qquad 8 = k$$

Di conseguenza r appartiene a π_k per $k = 8$.

b) La direzione ortogonale a π_k è $(2, 1, -1)$, quindi r' ha equazioni:

$$r' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

La retta r è parallela a $(3, 0, 6)$, ovvero a $(1, 0, 2)$, quindi il piano ortogonale a r per A ha equazioni

$$\pi' : \; x + 2z = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = s - 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

c) Una retta passante per l'origine e parallela a π_k appartiene al piano parallelo a π_k passante per l'origine, di equazione $2x+y-z = 0$. Analogamente una retta passante per l'origine e perpendicolare a r appartiene al piano ortogonale a r passante per l'origine, di equazione $x+2z = 0$. Di conseguenza la retta cercata è data dall'intersezione di tali piani:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = -2t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 0.2. *Si considerino i seguenti polinomi di* $\mathbf{R}_3[x]$:

$$p_1(x) = x^3 + x, \qquad p_2(x) = 3x^2 + 3, \qquad p_3(x) = -3x^2 + (k + 3)x - 3 \qquad p_4(x) = 3x^3 + (k + 6)x + k^2 + 3k$$

con k *parametro reale, e sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}_3[x]$ *generato da* $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ *e* $p_4(x)$.

a) *Si stabilisca per quali* k *il polinomio* $p(x) = 3x^3 + 3x + k + 3$ *appartiene a* V. *Posto* $k = -1$ *si scriva esplicitamente* $p(x)$ *come combinazione lineare di* $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ *e* $p_4(x)$.
b) *Si determini la dimensione e una base di* V.

Soluzione:

Ad ogni polinomio possiamo associare le sue coordinate rispetto alla base canonina $\left\{x^3, x^2, x, 1\right\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$\begin{aligned}
&p_1(x) = x^3 + x && \rightarrow \quad p_1 = (1,0,1,0)\\
&p_2(x) = 3x^2 + 3 && \rightarrow \quad p_2 = (0,3,0,3)\\
&p_3(x) = -3x^2 + (k+3)x - 3 && \rightarrow \quad p_3 = (0,-3,k+3,-3)\\
&p_4(x) = 3x^3 + (k+6)x + k^2 + 3k && \rightarrow \quad p_4 = (3,0,k+6,k^2+3k)\\
&p(x) = 3x^3 + 3x + k + 3 && \rightarrow \quad p = (3,0,3,k+3)
\end{aligned}$$

Si tratta quindi di stabilire se il vettore p appartiene al sottospazio $V' = \langle p_a, p_2, p_3, p_4\rangle$ di $\mathbf{R}^4$ e di determinare la dimensione e una base di take sottospazio.
Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|p$:

$$A|p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & | & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & k+3 & k+6 & | & 3 \\ 0 & 3 & -3 & k^2+3k & | & k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/3II \\ III-I \\ IV-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+3 & k+3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2+3k & | & k+3 \end{bmatrix}$$

a) Il vettore p appartiene a V', e quindi il polinomio $p(x)$ appartiene a V, se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p)$. I possibili pivot di A si annullano per $k = 0$ o $k = -3$. Notiamo però che per $k = -3$ si ha $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 2$, mentre per $k = 0$ si ha $\text{rg}(A) = 3 \neq \text{rg}(A|p) = 4$. Per $k \neq 0, -3$, infine, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 4$. Di conseguenza il sistema ammette soluzione, ovvero $p(x)$ appartiene a V, se e solo se $k \neq 0$.

Ponendo $k = -1$ nella matrice ridotta otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 3w = 3 \\ y - z = 0 \\ 2z + 2w = 0 \\ -2w = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ w = -1 \end{cases} \Rightarrow \qquad p(x) = 6p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) - p_4(x)$$

b) Consideriamo solo la matrice dei coefficienti, di cui abbiamo già studiato il rango:
- Se $k \neq 0, -3$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 4$ e una sua base è
$$\mathcal{B} = \{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}.$$
- Se $k = 0$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una sua base è
$$\mathcal{B} = \left\{p_1(x) = x^3 + x,\ p_2(x) = 3x^2 + 3,\ p_3(x) = -3x^2 + 3x - 3\right\}.$$
- Se $k = -3$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$ e una sua base è
$$\mathcal{B} = \left\{p_1(x) = x^3 + x,\ p_2(x) = 3x^2 + 3\right\}.$$

□

Esercizio 0.3. *Quando una matrice si dice* a scalini*? Cosa sono i* pivot *di una matrice a scalini?i Dare esempi di matrici di rango massimo e di matrici di rango* 1.

Esercizio 0.4. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(e_1) = (1,0,1), \qquad T(e_2) = (0,k-3,0), \qquad T(e_3) = (2,-1,2), \qquad T(e_4) = (-1,k,k-5)$$

e sia $v = (2,1,k-1)$, con k parametro reale.

a) *Si stabilisca per quali k l'applicazione T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Si determinino basi di nucleo e immagine di T al variare di k.*
c) *Si stabilisca per quali k il vettore v appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & k-3 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 & k-5 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande ridiciamo a gradini la matrice $M|v$:

$$M|v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & k-3 & -1 & k & | & 1 \\ 1 & 0 & 2 & k-5 & | & k-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad III - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & k-3 & -1 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-4 & | & k-3 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice M. L'applicazione T è suriettiva se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = \dim(\mathbf{R}^3) = 3$, mentre T è iniettiva se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(M) = 0$.

I possibili pivot di M si annullano per $k = 4$ o $k = 3$. Notiamo però che per $k = 4$ si ha $\mathrm{rg}(M) = 2$, mentre per $k = 3$ il rango di M resta comunque massimo, $\mathrm{rg}(M) = 3$. Di conseguenza T è suriettiva se e solo se $k \neq 4$, quando $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 3$.

Notiamo che in ogni caso $\mathrm{rg}(M) \leq 3$, quindi $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(M) \geq 1$ e T non è iniettiva per nessun valore di k.

b) È sufficiente distinguere due casi:
   - Se $k \neq 4$, abbiamo visto che T è suriettiva quindi $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ e una sua base è una qualsiasi base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ una possibile base è

     $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1) = (1,0,1),\ T(e_3) = (2,-1,2),\ T(e_4) = (1,k,k-5)\}$$

     Notiamo che l'insieme $\{T(e_1) = (1,0,1),\ T(e_2) = (0,k-3,0),\ T(e_4) = (1,k,k-5)\}$ non è una base per $k = 3$, infatti contiene il vettore nullo, mentre potrebbe essere presa come base per $k \neq 4, 3$.

     Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:

     $$\begin{cases} x + 2z - w = 0 \\ (k-3)y - z + kw = 0 \\ (k-4)w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (6-2k)t \\ y = t \\ z = (k-3)t \\ w = 0 \end{cases}$$

     Quindi una base del nucleo è

     $$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(6-2k, 1, k-3, 0)\}, \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 1$$

   - Se $k = 4$ abbiamo osservato al punto precedente che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 2$. Inoltre una sua base è

     $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1) = (1,0,1),\ T(e_2) = (0,1,0)\}$$

     Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M:

     $$\begin{cases} x + 2z + w = 0 \\ y - z + 4w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + s \\ y = t - 4s \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

     Quindi una base del nucleo è

     $$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-2,1,1,0),\ (1,-4,0,1)\}, \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 2$$

c) Abbiamo già osservato che per $k \neq 4$ l'applicazione T è suriettiva, quindi in tali casi v appartiene all'immagine di T, che coincide con tutto $\mathbf{R}^3$. Infatti per $k \neq 4$, si ha $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v) = 3$.

Per $k = 4$, invece, $\mathrm{rg}(M) = 2 \neq \mathrm{rg}(M|v) = 3$, quindi v non appartiene all'immagine di T.

□

Esercizio 0.5. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se T è diagonalizzabile.*
b) *Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T.*
c) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.*

Soluzione:

a) L'endomorfismo T è sicuramente diagonalizzabile perché la matrice M associata a T rispetto alla base canonica, che è ortonormale, è simmetrica.

b) Il polinomio caratteristico di T è

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (2-\lambda)(2-\lambda)\left[(4-\lambda)^2-4\right] - 4\cdot 4\left[(4-\lambda)^2-4\right] \\ &= (\lambda^2-8\lambda+12)(\lambda^2-4\lambda-12) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di T sono $\lambda = 6$, doppio, e $\lambda = \pm 2$, singoli.

Calcolando gli autospazi otteniamo:

$$\begin{aligned} E(6) &= \mathrm{N}(M-6I) = \langle (1,1,0,0),\ (0,0,1,1)\rangle \\ E(-2) &= \mathrm{N}(M+2I) = \langle (1,-1,0,0)\rangle \\ E(2) &= \mathrm{N}(M-2I) = \langle (0,0,1,-1)\rangle \end{aligned}$$

I generatori degli autospazi trovati sono tutti tra loro ortogonali, quindi una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ si ottiene normalizzando tali vettori:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right),\ \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right),\ \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

c) Per definizione di autovettore, la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Infatti, per esempio,

$$T(v_1) = T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) = \lambda v_1 = 6v_1 = 6v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 = (6,0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

Risultati analoghi si ottengono per gli altri autovettori.

$\square$

Esercizio 0.6. *Cos'è un* autovettore *di una matrice? Dare degli esempi per matrici* 3×3*. Dare anche un esempio di matrice reale priva di autovettori.*