

Esercizio 0.1. Si considerino il fascio di piani $\pi_k : x - 2y + z = k$, con k parametro reale, e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- Si stabilisca per quali k la retta r appartiene a π_k .
- Dato il punto $A(1, 1, 1)$, si determinino equazioni cartesiane e parametriche del piano π' perpendicolare a r e passante per A e della retta r' perpendicolare a π_k e passante per A .
- Si determinino le equazioni della retta parallela a π_k e perpendicolare a r passante per l'origine.

SOLUZIONE:

- Perché r appartenga a π_k , le coordinate del generico punto di r devono soddisfare l'equazione di π_k , quindi, sostituendo:

$$1 - 2t - 2(3 - t) + 4 = k \quad \Rightarrow \quad -1 = k$$

Di conseguenza r appartiene a π_k per $k = -1$.

- La direzione ortogonale a π_k è $(1, -2, 1)$, quindi r' ha equazioni:

$$r' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

La retta r è parallela a $(-2, -1, 0)$, quindi il piano ortogonale a r per A ha equazioni

$$\pi' : -2x - y = -3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = s \\ y = -2s + 3 \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

- Una retta passante per l'origine e parallela a π_k appartiene al piano parallelo a π_k passante per l'origine, di equazione $x - 2y + z = 0$. Analogamente una retta passante per l'origine e perpendicolare a r appartiene al piano ortogonale a r passante per l'origine, di equazione $2x + y = 0$. Di conseguenza la retta cercata è data dall'intersezione di tali piani:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -5t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 0.2. Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$p_1(x) = x^3 + 1, \quad p_2(x) = 2x^2 + 2x, \quad p_3(x) = 2x^3 + 2x^2 + kx + 2 \quad p_4(x) = (k - 2)x + k^2 - 2k$$

con k parametro reale, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}_3[x]$ generato da $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$.

- Si stabilisca per quali k il polinomio $p(x) = 2x^3 + k + 2$ appartiene a V . Posto $k = 3$ si scriva esplicitamente $p(x)$ come combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$.
- Si determini la dimensione e una base di V .

SOLUZIONE:

Ad ogni polinomio possiamo associare le sue coordinate rispetto alla base canonica $\{x^3, x^2, x, 1\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + 1 && \rightarrow p_1 = (1, 0, 0, 1) \\ p_2(x) &= 2x^2 + 2x && \rightarrow p_2 = (0, 2, 2, 0) \\ p_3(x) &= 2x^3 + 2x^2 + kx + 2 && \rightarrow p_3 = (2, 2, k, 2) \\ p_4(x) &= (k-2)x + k^2 - 2k && \rightarrow p_4 = (0, 0, k-2, k^2 - 2k) \\ p(x) &= 2x^3 + k - 2 && \rightarrow p = (2, 0, 0, k+2) \end{aligned}$$

Si tratta quindi di stabilire se il vettore p appartiene al sottospazio $V' = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$ di \mathbf{R}^4 e di determinare la dimensione e una base di take sottospazio.

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|p$:

$$A|p = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k & k-2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & k^2-2k & k+2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{III-II \\ IV-I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-2k & k \end{array} \right]$$

- a) Il vettore p appartiene a V' , e quindi il polinomio $p(x)$ appartiene a V , se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p)$. I possibili pivot di A si annullano per $k = 0$ o $k = 2$. Notiamo però che per $k = 0$ si ha $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 3$, mentre per $k = 2$ si ha $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|p) = 3$. Per $k \neq 0, 2$, infine, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|p) = 4$. Di conseguenza il sistema ammette soluzione, ovvero $p(x)$ appartiene a V , se e solo se $k \neq 2$.

Ponendo $k = 3$ nella matrice ridotta otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ y + z = 0 \\ z + w = 0 \\ 3w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow p(x) = 4p_1(x) + p_2(x) - p_3(x) + p_4(x)$$

- b) Consideriamo solo la matrice dei coefficienti, di cui abbiamo già studiato il rango:

– Se $k \neq 0, 2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 4$ e una sua base è

$$\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}.$$

– Se $k = 0$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una sua base è

$$\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^3 + 1, p_2(x) = 2x^2 + 2x, p_3(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2\}.$$

– Se $k = 2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$ e una sua base è

$$\mathcal{B} = \{p_1(x) = x^3 + 1, p_2(x) = 2x^2 + 2x\}.$$

□

Esercizio 0.3. Dare la definizione di uno spazio vettoriale. Dare esempi di basi per uno spazio di polinomi e per uno spazio di matrici.

Esercizio 0.4. Sia $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(e_1) = (-1, 0, 1), \quad T(e_2) = (1, k-3, -1), \quad T(e_3) = (0, 1, 0), \quad T(e_4) = (-2k, 0, 3k+1)$$

e sia $v = (1, 1, k-4)$, con k parametro reale.

- Si stabilisca per quali k l'applicazione T è iniettiva e/o suriettiva.
- Si determinino basi di nucleo e immagine di T al variare di k .
- Si stabilisca per quali k il vettore v appartiene all'immagine di T .

SOLUZIONE:

La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2k \\ 0 & k-3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3k+1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande ridiciamo a gradini la matrice $M|v$:

$$M|v = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & -2k & 1 \\ 0 & k-3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3k+1 & k-4 \end{array} \right] \Rightarrow III + I \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & -2k & 1 \\ 0 & k-3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & k-3 \end{array} \right]$$

- a) Consideriamo la matrice M . L'applicazione T è suriettiva se $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M) = \dim(\mathbf{R}^3) = 3$, mentre T è iniettiva se $\dim(\text{N}(T)) = 4 - \text{rg}(M) = 0$.

I possibili pivot di M si annullano per $k = -1$ o $k = 3$. Notiamo però che per $k = -1$ si ha $\text{rg}(M) = 2$, mentre per $k = 3$ il rango di M resta comunque massimo, $\text{rg}(M) = 3$. Di conseguenza T è suriettiva se e solo se $k \neq -1$, quando $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M) = 3$.

Notiamo che in ogni caso $\text{rg}(M) \leq 3$, quindi $\dim(\text{N}(T)) = 4 - \text{rg}(M) \geq 1$ e T non è iniettiva per nessun valore di k .

- b) È sufficiente distinguere due casi:

- Se $k \neq -1$, abbiamo visto che T è suriettiva quindi $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ e una sua base è una qualsiasi base di \mathbf{R}^3 . In particolare $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ e una possibile base è

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1) = (-1, 0, 1), T(e_3) = (0, 1, 0), T(e_4) = (-2k, 0, 3k+1)\}.$$

Notiamo che l'insieme $\{T(e_1) = (-1, 0, 1), T(e_2) = (1, k-3, 1), T(e_4) = (-2k, 0, 3k+1)\}$ non è una base per $k = 3$, infatti i vettori $T(e_1)$ e $T(e_2)$ sono linearmente dipendenti, mentre potrebbe essere presa come base per $k \neq -1, 3$.

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M :

$$\begin{cases} -x + y - 2kw = 0 \\ (k-3)y + z = 0 \\ (k+1)w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = (3-k)t \\ w = 0 \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo è

$$\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(1, 1, 3-k, 0)\}, \quad \dim(\text{N}(T)) = 1$$

- Se $k = -1$ abbiamo osservato al punto precedente che $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M) = 2$. Inoltre una sua base è

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1) = (-1, 0, 1), T(e_2) = (1, -4, -1)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M :

$$\begin{cases} -x + y + 2w = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 2s \\ y = t \\ z = 4t \\ w = s \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo è

$$\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(1, 1, 4, 0), (2, 0, 0, 1)\}, \quad \dim(\text{N}(T)) = 2$$

- c) Abbiamo già osservato che per $k \neq -1$ l'endomorfismo T è suriettivo, quindi in tali casi v appartiene all'immagine di T , che coincide con tutto \mathbf{R}^3 . Infatti per $k \neq -1$, si ha $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|v) = 3$.

Per $k = -1$, invece, $\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M|v) = 3$, quindi v non appartiene all'immagine di T . □

Esercizio 0.5. Sia $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla matrice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Si stabilisca se T è diagonalizzabile.
- Si trovi una base ortonormale \mathcal{B} di \mathbf{R}^4 formata da autovettori di T .
- Si determini la matrice associata a T rispetto alla base \mathcal{B} trovata al punto precedente.

SOLUZIONE:

- a) L'endomorfismo T è sicuramente diagonalizzabile perché la matrice M associata a T rispetto alla base canonica, che è ortonormale, è simmetrica.
 b) Il polinomio caratteristico di T è

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) [(5 - \lambda)^2 - 1] - 5 \cdot 5 [(5 - \lambda)^2 - 1] \\ &= (\lambda^2 - 10\lambda - 24)(\lambda^2 + 2\lambda - 24) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di T sono $\lambda = 4$, doppio, e $\lambda = \pm 6$, singoli.

Calcolando gli autospazi otteniamo:

$$E(4) = N(M - 4I) = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$$

$$E(-6) = N(M + 6I) = \langle (1, -1, 0, 0) \rangle$$

$$E(6) = N(M - 6I) = \langle (0, 0, 1, -1) \rangle$$

I generatori degli autospazi trovati sono tutti tra loro ortogonali, quindi una base ortonormale di \mathbf{R}^4 si ottiene normalizzando tali vettori:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

- c) Per definizione di autovettore, la matrice associata a T rispetto alla base \mathcal{B} è la matrice diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Infatti, per esempio,

$$T(v_1) = T \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right) = \lambda v_1 = 4v_1 = 4v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 = (4, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$

Risultati analoghi si ottengono per gli altri autovettori.

□

Esercizio 0.6. *Cos'è una base ortonormale di un sottospazio di \mathbf{R}^n ? Dare degli esempi per \mathbf{R}^3 e per dei sottospazi di \mathbf{R}^3 .*