CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

RETTE E PIANI – GEOMETRIA E ALGEBRA 2010/11

- In $\mathbf{R}^2$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2)$ è:
$$r: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$
- In $\mathbf{R}^2$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è:
$$r: \quad ax + by + k = 0$$
- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2, u_3)$ è:
$$r: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$
- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è data dall'intersezione di due piani:
$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 \end{cases}$$

- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** del **piano** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzioni parallele ai vettori $u = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ e $v = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è:
$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t + v_1 s \\ y = y_0 + u_2 t + v_2 s \\ z = z_0 + u_3 t + v_3 s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$
- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di un **piano** è :
$$\pi: \quad ax + by + cz = k$$
Il vettore (a, b, c) ha direzione perpendicolare al piano.

- Due rette r_1 e r_2 sono **parallele** se hanno la stessa direzione, ovvero se i rispettivi vettori direzione sono proporzionali.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **sghembe** se non sono parallele e non si intersecano.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **complanari** se non sono sghembe, ovvero se sono parallele oppure si intersecano.
- Due piani π_1 e π_2 sono **paralleli** se non si intersecano. Analogamente due piani $\pi_1 : \ a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$ e $\pi_2 : \ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$ sono paralleli se i vettori (a_1, b_1, c_1) e $(a_2, b_2 . c_2)$ sono proporzionali.
- Una retta r è **perpendicolare** al piano $\pi : \ ax + by + cz = k$ se r ha direzione parallela al vettore $u = (a, b, c)$.

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto scalare** di u e v il **numero**:
$$(u, v) = u \cdot v^T = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$
- Date due rette r_1 parallela a un vettore u e r_2 parallela a un vettore v, l'**angolo** ϑ tra le due rette è dato da:
$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|},$$
dove $|u|$ =**norma** di u= **lunghezza** di $u =\sqrt{(u, u)} = \sqrt{u \cdot u^T}$.

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto vettoriale** di u e v il vettore:
$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$
- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^2$, di lati $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2)$ è:
$$\text{Area(parallelogramma)} = |u_1 v_2 - u_2 v_1| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$
- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^3$, di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ è data dalla lunghezza (norma) $|u \times v|$ del vettore $u \times v$ prodotto vettoriale di u e v:
$$\text{Area(parallelogramma)} = |u \times v|,$$
- Il **volume del parallelepipedo** di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ è uguale al valore assoluto del prodotto misto $(u,\ v \times w)$:
$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u,\ v \times w)| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$
