

Il **prodotto scalare canonico di \mathbf{R}^n** (che noi considereremo salvo diversa indicazione) è: dati $u = (x_i)_{i=1,\dots,n}$ e $v = (y_i)_{i=1,\dots,n}$:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = u \cdot v^T$$

Norma o lunghezza: definiamo norma o lunghezza di un vettore v il numero

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

Notiamo che

$$(v, v) = \|v\|^2$$

Angolo tra due vettori. Dati due vettori $u, v \in V$ e indicato con ϑ l'angolo convesso tra essi, si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Ortogonalità. Due vettori $u, v \in V$ sono ortogonali se $(u, v) = 0$.

Proiezione ortogonale su un vettore. Dati due vettori $u, v \in V$ si chiama proiezione ortogonale di u su v il vettore

$$pr_v(u) = \frac{(u, v)}{\|v\|^2} \cdot v = \frac{(u, v)}{(v, v)} \cdot v$$

- $pr_v(u)$ è un vettore parallelo a v ,
- $u - pr_v(u)$ è un vettore ortogonale a v ,
- $u = (u - pr_v(u)) + pr_v(u)$, ovvero ogni vettore u può sempre essere scritto come somma di un vettore ortogonale e di uno parallelo ad un altro vettore v .

Complemento ortogonale. Dato uno spazio vettoriale $W \subseteq \mathbf{R}^n$, chiamiamo complemento ortogonale di W lo spazio vettoriale

$$W^\perp = \{u \in \mathbf{R}^n \mid (u, w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

W^\perp è uno spazio vettoriale.

Insieme ortonormale è un insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di vettori:

- a due a due ortogonali: $(v_i, v_j) = 0$ per $i \neq j = 1, \dots, n$,
- di norma 1: $\|v_i\| = 1 = (v_i, v_i)$ per $i = 1, \dots, n$

Gram-Schmidt. Permette di individuare una base ortonormale

$$\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

a partire da una base qualsiasi

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

nel seguente modo.

Determiniamo innanzitutto a partire da \mathcal{B} una base

$$\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1). Notiamo che siccome dei vettori w_i ci interessa solo l'ortogonalità, possiamo sostituire un vettore w_i ottenuto con un qualsiasi suo multiplo. In particolare per ottenere la base \mathcal{B}' cercata è sufficiente rendere i vettori w_i di norma 1, dividendoli per la loro norma:

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1$
- $w_3 = v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2$
- ...
- $w_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} pr_{w_i}(v_n) = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(v_n, w_i)}{(w_i, w_i)} \cdot w_i$

Quindi

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}, \quad \dots, \quad u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$$

La base canonica è una base ortonormale.

Endomorfismo simmetrico: $T: V \rightarrow V$ tale che:

$$(T(u), v) = (u, T(v)) \quad \forall u, v \in V$$

PROPRIETÀ :

Se T è un endomorfismo e A è la matrice associata a T rispetto a una **base ortonormale**, allora:

- T è simmetrico $\Leftrightarrow A$ è simmetrica (cioè $A = A^T$).
- T ha n autovalori reali (contati con la loro molteplicità).
- Autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

Matrice ortogonale: P è una matrice ortogonale se

$$P \cdot P^T = I \quad \text{ovvero} \quad P^{-1} = P^T$$

Notiamo che $\det(P) = \pm 1$, e P è detta ortogonale speciale se $\det(P) = 1$.

Teorema spettrale

- Se T è un endomorfismo simmetrico di V , allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di T . In particolare T è diagonalizzabile, cioè esiste una base (ortonormale) di V rispetto alla quale la matrice associata a T è diagonale.
- Se A è una matrice simmetrica, allora A è simile a una matrice diagonale D (ovvero A è diagonalizzabile). Inoltre la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D$$