CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 11– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 11.1. *[9.16]* Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ 1,1,0),\ (0,3,0),\ (0,1,1)\ \}$$

a) Si determinino gli autovalori di T.
b) Si determinino gli autovettori e gli autospazi di T.
c) Si stabilisca se T è diagonalizzabile.

Esercizio 11.2. *[9.28]* Si consideri la matrice ad elementi reali

$$A = \begin{bmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{bmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori della matrice A.
b) Stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice data è diagonalizzabile.

Esercizio 11.3. *[10.7]* Siano assegnati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:

$$v = (2,-1,0,1), \qquad w = (-1,2,0,2)$$

a) Si calcoli l'angolo tra i due vettori.
b) Si determini la proiezione ortogonale di v su w.
c) Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w.

Esercizio 11.4. *[10.8]* Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v = (3,4,-2), \qquad w = (2,1,-1)$$

Esercizio 11.5. *[10.15]* Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,1,1).$$

a) Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2.
b) Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2.
c) Trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori v_1 e v_2.

Esercizio 11.6. *[10.16]* Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 11.7. *[10.21]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare tale che

$$T(1,-2,1) = (2,1),\ T(1,0,0) = (-1,2),\ T(0,1,0) = (-1,0).$$

a) Che dimensione ha l'immagine di T?
b) Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$) del nucleo di T.

Esercizio 11.8. *[11.1]* [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato.] Calcolare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 11.9. *[11.2]* Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale P^TAP sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 11.10. *[11.3]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) Stabilire se l'endomorfismo T é diagonalizzabile.
b) Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).
c) Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

Esercizio 11.11. *[11.5]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Esercizio 11.12. *[11.9]* Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in $\mathbf{R}$.
b) Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

Esercizio 11.13. *[11.13]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) Stabilire se T è invertibile.
b) Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.
c) Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza T.