CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 10– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 10.1. *[9.2]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) Verificare che i vettori $v_1 = (0, 3, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.
b) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
c) Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.
d) Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$).

Esercizio 10.2. *[9.3]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.
b) Stabilire se T è diagonalizzabile.
c) Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).

Esercizio 10.3. *[9.8]* Sia T l'endomorfismo definito dalla matrice associata rispetto alla base canonica:

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare Nucleo e Immagine di T.
b) Determinare autovalori e autovettori di T.
c) Stabilire se T è diagonalizzabile.
d) Stabilire se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, e in caso positivo determinarla.

Esercizio 10.4. *[9.7]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.
b) Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.
c) Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.

Esercizio 10.5. *[9.9]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.
b) Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.

Esercizio 10.6. *[9.13]* [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 10.7. *[9.22]* Data la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si discuta la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.
b) Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di M.

Esercizio 10.8. *[9.23 e 9.26]* Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori di k la matrice B è diagonalizzabile.
b) Stabilire per quali valori di k le due matrici A e B sono simili.
c) Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?

Esercizio 10.9. *[9.27]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire se 4 è autovalore di A. Calcolare gli autovalori e autovettori di A.
b) La matrice A è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.
c) Sia C la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A e C siano simili?

Esercizio 10.10. *[9.33]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio

$$T(p(x)) = (a+kb)x^2 + (ka+b)x + kc.$$

a) Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.
b) Calcolare gli autovalori di T.