

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 9– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 9.1. [v.8.37] Sia T la funzione lineare da \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^3 definita da

$$T(x, y, z) = (3x - 2y, x + y + z, 2x - 3y - z)$$

- a) Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.
- b) Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = ((2, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Esercizio 9.2. [8.40] Sia $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2))$ due basi di \mathbf{R}^2 e \mathbf{R}^3 rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

Esercizio 9.3. [8.44] Sia $S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $((1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 0, 3))$ di \mathbf{R}^3 .

- a) Si scriva la matrice associata a S rispetto alle basi canoniche.
- b) Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.

Esercizio 9.4. [8.18] Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (2x, y, 0)$$

- (1) Dato il vettore $w = (2, -1, 1)$, calcolare $T(w)$.
- (2) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
- (3) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A .
- (4) Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali $Im(T)$ e $N(T)$.
- (5) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ con $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ è una base di \mathbf{R}^3 .
- (6) Determinare la matrice B associata a T rispetto alla base \mathcal{B} dello spazio di partenza e alla base canonica \mathcal{E} dello spazio di arrivo, cioè $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$.
- (7) Determinare le componenti del vettore $w = (2, -1, 1)$ rispetto alla base \mathcal{B} .
- (8) Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B .

Esercizio 9.5. [8.36] Sia $S : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4, 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

- a) Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S .
- b) Sia \mathcal{E} la base canonica di \mathbf{R}^4 e sia \mathcal{B} la base di \mathbf{R}^3 costituita dai vettori

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S .

Esercizio 9.6. [8.35] Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x + y, 2x - y - z, 2y + z)$$

e sia $\mathcal{B} = ((1, 2, -4), (0, 1, 1), (1, 0, -7))$ una base di \mathbf{R}^3 .

- a) Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.
- b) Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} e alla base canonica \mathcal{E} .
- c) Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} e alla base canonica \mathcal{E} .
- d) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} .

Esercizio 9.7. [9.1] Verificare che $v = (1, 0, 0, 1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_3, x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Esercizio 9.8. [9.6] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.
- Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.
- Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.

Esercizio 9.9. [9.7] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.
- Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.
- Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.