CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 8– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 8.1. *[8.1]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.

Esercizio 8.2. *[8.3]* Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Esercizio 8.3. *[8.5]* Determinare una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Esercizio 8.4. *[8.8]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T(v) = Av$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare una base di Nucleo e Immagine di T.
b) Stabilire se $(-3, 2, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 8.5. *[8.7]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1,2,1)$, $T(e_2) = (1,0,-1)$.
a) Esplicitare $T(x,y)$.
b) Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).
c) Stabilire se $(3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 8.6. *[8.6]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.
a) Verificare che T è lineare.
b) Determinare Nucleo e Immagine di T.
c) Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).
d) Determinare $T(1,2)$ usando la definizione e usando la matrice A.

Esercizio 8.7. *[8.17]*
a) Verificare che le relazioni

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.
b) Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.
c) Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.

Esercizio 8.8. *[8.11]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

rispetto alle basi canoniche.
a) Trovare una base del nucleo N(T) e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.
b) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
c) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?

Esercizio 8.9. *[8.30]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stabilire se T invertibile.
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.

Esercizio 8.10. *[8.16]* Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$
$$T(x, y, z, w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$
a) Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.
b) Si determini l'inversa T^{-1}.

Esercizio 8.11. *[8.34]* Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo
$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ 3x - z,\ 2x - y + z)$$
e sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo
$$g(x, y, z) = (x + z,\ x - y + z,\ y)$$
Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Esercizio 8.12. *[8.32]* Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice
$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
a) Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.
b) Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.

Esercizio 8.13. *[8.15]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:
$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$
a) Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.
b) Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.

Esercizio 8.14. *[8.9]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.