CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 7.1. *[7.36]* Sia $V = \langle\, v_1,\ v_2,\ v_3\, \rangle$ con

$$v_1 = (k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$.
b) Si determini la dimensione una base di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 7.2. *[7.50]* Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle(2, -1, -2),\ (-3, 4, 3)\rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Esercizio 7.3. *[7.64]*

a) Sia

$$V = \langle\ (1, 2, 1),\ (-1, 3, 0),\ (3, 1, 2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) Sia

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0\ \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.

Esercizio 7.4. *[7.66]* Dati i vettori linearmente indipendenti $v_1 = (3, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 4, -2)$ completare l'insieme $S = \{v_1, v_2\}$ in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 7.5. *[7.67]* Siano

$$v_1 = (1, -1, -1, 1),\ v_2 = (k, 1, 1, -1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) Si trovino i valori del parametro k per i quali v_1 e v_2 sono indipendenti.
b) Per $k = 2$, si estenda l'insieme $\{v_1, v_2\}$ a una base di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 7.6. *[7.68]* Si consideri l'insieme S costituito dai seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (1, 2, 2, 1), \qquad v_2 = (2, 1, 2, 1), \qquad v_3 = (0, 1, 2, 1)$$

a) E' possibile estendere S a una base di $\mathbf{R}^4$?
b) In caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S.

Esercizio 7.7. *[7.70]* Sia dato l'insieme

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0\ \}$$

a) Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.
b) Determinare una base di V.

Esercizio 7.8. *[7.71]* Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) Verificare che l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Esprimere $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 7.9. *[7.72]* Si considerino i polinomi $p_1 = x^2+ax+b+c$, $p_2 = x^2+bx+a+c$, $p_3 = x^2+cx+a+b$.

a) Mostrare che per ogni valore dei parametri a, b, c i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[x]$.
b) Calcolare la dimensione e una base dello spazio $\langle p_1, p_2, p_3\rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ al variare di a, b, c.

Esercizio 7.10. *[7.74]* Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.

Esercizio 7.11. *[7.75]* Si considerino i polinomi a coefficienti reali

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di $\mathbf{R}_2[x]$.