CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 2– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 2.1. *[4.1]* Risolvere il seguente sistema non omogeneo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2.2. *[4.2]* Risolvere il seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Esercizio 2.3. *[4.3]* Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} kx + ky + k^2z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.
b) Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.

Esercizio 2.4. *[4.5]* Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z & = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z & = 1 + 2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 2.5. *[7.1]* Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.6. *[7.2]* Siano $v, w \in \mathbf{R}^n$ vettori colonna. Dimostrare che la matrice $A = vw^T \in M_n(\mathbf{R})$ ha rango 0 oppure 1.

Esercizio 2.7. *[7.4]* Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Si stabilisca il rango di A al variare di k.
b) Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.

Esercizio 2.8. *[7.13]* Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = t - 2 \\ tx_1 + (t-4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-2t)x_2 = 2t - 4 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) Si dica per quali valori di t il sistema è compatibile.
b) Per i valori di t che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.

Esercizio 2.9. *[7.20]* Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) Si calcoli il rango di A.
b) Si stabilsca per quali valori di k il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.

Esercizio 2.10. *[6.4]* Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Esercizio 2.11. *[6.7]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
b) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.

Esercizio 2.12. *[6.9]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.
b) Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?