

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 1- GEOMETRIA 2010/11

Esercizio 1.1. [1.2] Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A , B e scalari λ , $\mu \in \mathbf{R}$, calcolare $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$, AB , BA , A^2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2, \mu = -1$$

Esercizio 1.2. [1.3] Date le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ per $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 1.3. [1.4] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 e I_4A^T .

Esercizio 1.4. [1.5] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ e AB^T .

Esercizio 1.5. [1.6] Calcolare la potenza A^3 della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.6. [1.8] Date le seguenti matrici A , calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.7. [1.9] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB , BA , BC e CB .

Esercizio 1.8. [1.10] Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$)

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I .

Esercizio 1.9. [1.11] Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.

Esercizio 1.10. [1.12] Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda, x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.11. [1.13] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Esercizio 1.12. [1.14] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C .

Esercizio 1.13. [1.15] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B . In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Esercizio 1.14. [1.18] Si risolva il sistema $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.15. [1.20] Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$