

## CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI E ENDOMORFISMI – GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Sia  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  una applicazione lineare (endomorfismo) e  $M$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^n$ . Parleremo quindi indifferentemente di  $T$  e  $M$ .

---

Il **Polinomio caratteristico** di  $M$  è il polinomio

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$$

Notiamo che  $p_M(\lambda)$  è un polinomio di grado  $n$  nell'incognita  $\lambda$ .

---

Un **Autovalore** di  $M$  è un numero  $\lambda$  per cui esiste un vettore  $v \in \mathbf{R}^n$  **non nullo** tale che

$$Mv = \lambda v$$

OSSERVAZIONI:

- Se  $\lambda$  è un autovalore di  $M$  allora per qualche  $v \neq 0$ :

$$Mv = \lambda v \Rightarrow (M - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \det(M - \lambda I) = 0$$

quindi gli autovalori di  $M$  sono gli **zeri del polinomio caratteristico**, ovvero si determinano risolvendo

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

- La molteplicità di  $\lambda$  come zero del polinomio caratteristico è detta **molteplicità algebrica** dell'autovalore  $\lambda$ .
- 

Un **Autovettore** relativo a un autovalore  $\lambda$  è un vettore  $v$  (e sicuramente ne esistono non nulli) tale che

$$Mv = \lambda v \Rightarrow (M - \lambda I)v = 0$$

Quindi  $v$  è **soluzione del sistema omogeneo associato a  $M - \lambda I$** .

OSSERVAZIONI:

- L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore  $\lambda$  formano uno spazio vettoriale (sottospazio di  $\mathbf{R}^n$ ), detto **Autospazio** relativo all'autovalore  $\lambda$ :

$$E(\lambda) = \{ \text{autovettori relativi a } \lambda \}$$

- Chiamiamo **Molteplicità geometrica** di  $\lambda$  la dimensione di  $E(\lambda)$ .
- Gli autovettori relativi all'autovalore  $\lambda = 0$  formano il nucleo di  $M$ , ovvero le soluzioni del sistema omogeneo associato a  $M$ :  $E(0) = \ker(M)$ .
- Per quanto riguarda la dimensione di  $E(\lambda)$  abbiamo che

$$1 \leq \dim(E(\lambda)) \leq \text{molteplicità algebrica di } \lambda$$

In particolare se un autovalore è singolo, allora il relativo autospazio ha sicuramente dimensione 1.

- Autovettori di autospazi distinti sono linearmente indipendenti.
  - Poichè gli endomorfismi sono applicazioni di uno spazio in se stesso, la base dello spazio di arrivo e di partenza è sempre la stessa (a differenza di quanto poteva accadere negli esercizi del capitolo precedente).
- 

**Diagonalizzabilità.**

Una matrice  $M$ ,  $n \times n$ , è **Diagonalizzabile** se è **simile a una matrice diagonale**  $D$ , ovvero esiste una matrice  $P$ , detta **matrice diagonalizzante**, tale che  $P^{-1}MP = D$  è una matrice diagonale.

## OSSERVAZIONI:

- Poiché  $P^{-1}MP = D$ , le matrici  $M$  e  $D$  sono simili.
- La matrice diagonalizzante  $P$  ha per colonne autovettori linearmente indipendenti di  $M$ .
- $P^{-1}MP = D$  ha sulla diagonale gli autovalori di  $M$ .
- Una matrice  $M$ ,  $n \times n$ , è **Diagonalizzabile** se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è  $n$ , ovvero se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è  $n$ , ovvero se ha  $n$  autovettori linearmente indipendenti.
- Condizione necessaria perchè una matrice sia diagonalizzabile è che **la molteplicità algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidano**.
- Se  $M$  ha  $n$  autovalori distinti allora è sicuramente diagonalizzabile (infatti ha sicuramente  $n$  autospazi di dimensione 1).
- Se una matrice  $M$  è diagonalizzabile allora esiste una **base di  $\mathbf{R}^n$  formata da autovettori di  $M$** . La diagonalizzazione sottintende infatti un cambiamento di base in  $\mathbf{R}^n$ .
- Due matrici diagonalizzabili sono associate allo stesso endomorfismo (rispetto a basi differenti) se sono simili alla stessa matrice diagonale (ovvero hanno gli stessi autovalori). Analogamente se solamente una delle due matrici è diagonalizzabile allora non possono essere associate allo stesso endomorfismo.
- Le matrici e gli endomorfismi simmetrici godono di particolari proprietà.