CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 10– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 10.1 (9.2). *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Verificare che i vettori $v_1 = (0, 3, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
c) *Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
d) *Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

a) Calcoliamo le immagini dei vettori v_i:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(0, 3, 1) = (0, 6, 2) = 2v_1, \\ T(v_2) &= T(0, -1, 1) = (0, 2, -2) = -2v_2, \\ T(v_3) &= T(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) = v_3 \end{aligned}$$

quindi v_1 è autovettore rispetto all'autovalore 2, v_2 è autovettore rispetto all'autovalore -2, v_3 è autovettore rispetto all'autovalore 1.

b) Verifichiamo che la matrice associata ai tre vettori $v_1,\ v_2$ e v_3 ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \cdot (3 + 1) \neq 0$$

I tre vettori sono quindi linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

c) Abbiamo già visto che $v_1,\ v_2$ e v_3 sono autovettori, quindi:

$$\begin{aligned} &T(v_1) = 2v_1 = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad && T(v_1) = (2, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ &T(v_2) = -2v_2 = 0v_1 - 2v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad && T(v_2) = (0, -2, 0)_{\mathcal{B}} \\ &T(v_3) = v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \quad \Rightarrow \quad && T(v_3) = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

e la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$D = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

d) Utilizzando il metodo della matrice di transizione per determinare la matrice D, sappiamo che la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$).

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice D associata a T rispetto alla nuova base è $D = P^{-1}AP$, infatti $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}\, M(T)\, M_{\mathcal{B}}^{\mathbf{C}}$. La matrice

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è quindi la matrice diagonalizzante cercata.

□

Esercizio 10.2 (9.3). *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*

c) *Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

a) Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; A \cdot v = \lambda v \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} x+y \\ 3y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)z = \end{cases} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione $v \neq 0$ se e solo se il sistema omogeneo trovato ha soluzione non nulla. Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1, 3, 2$$

Il polinomio $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è detto **polinomio caretteristico di** A.

Consideriamo i tre casi

– Se $\lambda = 1$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 0, 0)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 1:

$$T(t, 0, 0) = A \cdot (t, 0, 0) = (t, 0, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 1:

$$E(1) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 3$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 2t, 0)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 3:

$$T(t, 2t, 0) = A \cdot (t, 2t, 0) = (3t, 6t, 0) = 3 \cdot (t, 2t, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 3:

$$E(3) = \langle (1, 2, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 2$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(0, 0, t)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 2:

$$T(0, 0, t) = A \cdot (0, 0, t) = (0, 0, 2t) = 2 \cdot (0, 0, t).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 2:

$$E(2) = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

b) T è diagonalizzabile se rispetto a una opportuna base ha associata una matrice diagonale, ovvero se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T. Prendiamo un autovettore relativo a ciascun autovalore:

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (0,0,1)$$

e stabiliamo se sono linearmente indipendenti calcolando il determinante della matrice associata ai tre vettori:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = \{v_1, \ v_2, \ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, dunque T è diagonalizzabile. In realtà autovettori relativi ad autovalori differenti sono sempre linearmente indipendenti.

c) Abbiamo già determinato la base al punto precedente. Inoltre

$$\begin{array}{l} T(v_1) = v_1 \ \Rightarrow \ T(v_1) = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) = 3v_2 \ \Rightarrow \ T(v_2) = (0,3,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) = 2v_3 \ \Rightarrow \ T(v_3) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} \end{array} \ \Rightarrow \ M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

□

Esercizio 10.3 (9.8)**.** *Sia T l'endomorfismo definito dalla matrice associata rispetto alla base canonica:*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
b) *Determinare autovalori e autovettori di T.*
c) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
d) *Stabilire se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, e in caso positivo determinarla.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\text{rg}(A) = 2$, di conseguenza:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 2, \qquad \dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(A) = 1$$

Inoltre una base dell'immagine di T è

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1), \ T(e_2)\} = \{(0,1,1), \ (6,0,0)\}$$

Per determinare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(-1,0,1)\}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di T:
$$p_A(\lambda) = -\lambda[-\lambda(1-\lambda)] - 6[1-\lambda-1] = \lambda^2(1-\lambda) + 6\lambda = \lambda(-\lambda^2+\lambda+6)$$
Quindi gli autovalori di T sono:
$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_3 = 3 \quad \text{singolo} \end{aligned}$$

c) Possiamo già rispondere alla seconda domanda in quanto gli autovalori sono tutti singoli, quindi la matrice è sicuramente diagonalizzabile.

b) Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$
Di conseguenza $E(0) = \langle (1, 0, -1) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:
$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(-2) = \langle (-3, 1, 1) \rangle$$

Infine calcoliamo l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$:
$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(3) = \langle (2, 1, 1) \rangle$$

d) Poichè T è diagonalizzabile esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T:
$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \{(1, 0, -1),\ (-3, 1, 1),\ (2, 1, 1)\ \}$$

□

Esercizio 10.4 (9.7)**.** *Date le matrici*
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

b) Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \;\Rightarrow\; (2-\lambda)=0 \text{ oppure } (\lambda^2-5\lambda+6)=0$$
$$\Rightarrow\; \lambda_1=2,\; \lambda_2=2,\; \lambda_3=3$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 3$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=0 \\ -y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(t,0,0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 3$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ -2y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(t,t,-2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(3) = \langle (1,1,-2) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione uno). Di conseguenza esistono solamente due autovettori linearmente indipendenti e non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

Consideriamo ora la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda)+6] - 1[-7(-\lambda-2)-6] - [-42+6(5-\lambda)] \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) - 7\lambda - 8 + 12 + 6\lambda \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - \lambda + 4 = (\lambda-4)[(-3-\lambda)(\lambda+1)-1] \\ &= (\lambda-4)[-\lambda^2-4\lambda-4] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di B sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$(\lambda-4)(-\lambda^2-4\lambda-4)=0$$
$$\Rightarrow\; (\lambda-4)=0 \text{ oppure } (-\lambda^2-4\lambda-4)=0$$
$$\Rightarrow\; \lambda_1=4,\; \lambda_2=-2,\; \lambda_3=-2$$

Di conseguenza gli autovalori di B sono

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -2 \quad \text{doppio}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ 1/6III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (0, t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 7 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 7I \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione uno). Infatti abbiamo determinato due soli autovettori linearmente indipendenti.

Consideriamo ora la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 9\lambda + 18 = (\lambda + 2)[(1-\lambda)(\lambda - 1) + 9] \\ &= (\lambda + 2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di C sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ (\lambda + 2) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di C sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -2 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 1/3I \\ II - I \\ III - 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t - s, t, s) = (t, t, 0) + (-s, 0, s) \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0),\ (-1, 0, 1) \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che C è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 1/3I \\ II + I \\ III + 2II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t, t, 2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uno, e l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico) e ha molteplicità geometrica due (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione due).

□

Esercizio 10.5 (9.9)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*
b) *Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla prima riga:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)[(-2 - \lambda)(5 - \lambda) + 12] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 1 \quad \text{singolo}$$

T è diagonalizzabile se l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & -6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/2II \\ 2III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2y + 3z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(s, -\frac{3}{2}t, t\right) \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(2) = \langle (1, 0, 0),\ (0, -3, 2) \rangle$$

Poiché $E(1)$ ha sicuramente dimensione 1, la somma delle dimensioni degli autospazi è $3 = \dim(\mathbf{R}^3)$ e T è diagonalizzabile.

b) Per determinare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori dobbiamo determinare anche l'autospazio $E(1)$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/3II \\ 3III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (0, -2t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(1) = \langle (0, -2, 1) \rangle$$

Infine la base di $\mathbf{R}^3$ cercata è

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0),\ (0, -3, 2),\ (0, -2, 1)\}$$

□

Esercizio 10.6 (9.13)**.** [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice A e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(k - \lambda)(2 - \lambda)$$

Gli autovalori di A sono quindi

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 2$, allora A ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice A diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 2$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, 0, 0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e A non è diagonalizzabile.

- Se $k = 2$ la matrice A diventa
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2 \quad \text{doppio}$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 2$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle\ (1,1,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1), e A è diagonalizzabile.

Consideriamo ora la matrice B e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$
Gli autovalori di B sono quindi
$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$
Poichè B ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica almeno 2, ma molteplicità geometrica 1, e B non è diagonalizzabile.

Consideriamo la matrice C e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_C(\lambda) = (3-\lambda)(k-\lambda)(1-\lambda)$$
Gli autovalori di C sono
$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3, \qquad \lambda = k$$
Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 3$, allora C ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice C diventa
$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 3$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato a $C - I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,-2,0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.

- Se $k = 3$ la matrice C diventa
$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3 \quad \text{doppio}$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 3$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $C - 3I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.

Consideriamo infine la matrice D e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_D(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$
Gli autovalori di D sono quindi
$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$
Poichè D ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $D - I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità geometrica 2.

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k \neq 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e l'autovalore $\lambda = k \neq 1$ ha molteplicità 1) quindi D è diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 3, ma molteplicità geometrica 2 quindi D non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 10.7 (9.22)**.** *Data la matrice*
$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di M.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di M è
$$p_M(\lambda) = (1-\lambda)(k-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$
Quindi gli autovalori sono $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ k$ e dobbiamo discutere i valori di k.
   - Se $k \neq 1,2,3$ i quattro autovalori sono distinti e singoli, quindi M è diagonalizzabile.
   - Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.
$$E(1) = N(M-I): \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2IV+I \\ III \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-4II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Poichè $\text{rg}(M-I) = 3$, $\dim(E(1)) = 4 - \text{rg}(M-I) = 1$ e M non è diagonalizzabile.

– Se $k = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(2) = N(M - 2I) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + 4z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \\ w = 2s + 4t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (-1, 0, 1, 4),\ (0, 1, 0, 2) \rangle$$

Poiché $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli, per $k = 2$ la matrice M è diagonalizzabile.

– Se $k = 3$ l'autovalore $\lambda = 3$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Poichè $\text{rg}(M - 3I) = 3$, $\dim(E(3)) = 1$ e M non è diagonalizzabile.

b) Per $k = 2$ abbiamo già determinato $E(2)$. Calcoliamo gli altri due autospazi:

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (0, 0, 0, 1) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + I \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + 4z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (2, 2, 0, 1) \rangle$$

Infine una delle basi cercate è

$$\mathcal{B} = \{\ (-1, 0, 1, 4),\ (0, 1, 0, 2),\ (0, 0, 0, 1),\ (2, 2, 0, 1) \}$$

□

Esercizio 10.8 (9.23 e 9.26)**.** *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k - 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Determinare per quali valori di k la matrice B è diagonalizzabile.*
b) *Stabilire per quali valori di k le due matrici A e B sono simili.*
c) *Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2$$

Quindi B ha due autovalori: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, doppio, ed è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 5 & k - 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k - 2)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k - 2)y = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi.

– Se $k \neq 2$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 1 e B non è diagonalizzabile.

– Se $k = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e B è diagonalizzabile.

b) Due matrici diagonalizzabili sono simili sse hanno gli stessi autovalori (contati con le rispettiva molteplicità). Studiamo quindi la diagonalizzabilità di A.

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Come la matrice B, anche A è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e A è diagonalizzabile.

In conclusione A e B sono simili quando sono entrambe diagonalizzabili, ovvero se $k = 2$

c) Dai punti precedenti sappiamo che per $k = 3$ la matrice B non è diagonalizzabile, mentre la matrice A è diagonalizzabile. Di conseguenza le matrici A e B non possono essere associate allo stesso endomorfismo.

□

Esercizio 10.9 (9.27)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se 4 è autovalore di A. Calcolare gli autovalori e autovettori di A.*

b) *La matrice A è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.*

c) *Sia C la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:*

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A e C siano simili?

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 7-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (6-\lambda)\left[(7-\lambda)(3-\lambda)+3\right] - 3\left[6-2\lambda+2\right] + \left[6-14+2\lambda\right] =$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 24) - 3(8-2\lambda) - (2\lambda - 8) =$$

$$= (6-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-4) + 6(\lambda-4) - 2(\lambda-4) =$$

$$= (\lambda-4)\left[(6-\lambda)(\lambda-6) + 6 - 2\right] = -(\lambda-4)(\lambda^2 - 12\lambda + 32)$$

a) Gli autovalori di A sono $\lambda = 4$ (doppio) e $\lambda = 8$. Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(4) = N(A-4I): \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x+3y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(4) = \langle\ (-3, 2, 0),\ (1, 0, 2)\ \rangle$

$$E(8) = N(A-8I): \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 6 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(8) = \langle\ (1, 1, 1)\ \rangle$

b) A è diagonalizzabile perché la molteplicitá algebrica e geometrica dei sui autovalori coincidono. La matrice diagonalizzante è:

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Poichè A è diagonalizzabile, A e C sono simili se anche C ha gli stessi autovalori di A ed è anch'essa diagonalizzabile (cioè sono simili alla stessa matrice diagonale). Perchè A e C abbiano gli stessi autovalori ($\lambda = 4$ doppio, e $\lambda = 8$) deve essere $t = 8$. Inoltre per tale valore l'autospazio $E(4)$ di C è

$$E_C(4) = N(C-4I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_C(4) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle \Rightarrow \dim(E_C(4)) = 1$$

Di conseguenza C non è diagonalizzabile e A e C non sono mai simili.

□

Esercizio 10.10 (9.33)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a+kb)x^2 + (ka+b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di T.*

Soluzione:

Notiamo che il generico polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ ha componenti (a, b, c) rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$. In particolare $p(x) = x^2$ ha componenti $(1, 0, 0)$, $p(x) = x$ ha componenti $(0, 1, 0)$ e $p(x) = 1$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In sostanza la base $\{x^2, x, 1\}$ corrisponde quindi alla base canonica. Inoltre T può essere vista come applicazione $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(a, b, c) = (a + kb,\ ka + b,\ kc).$$

a) Calcoliamo la immagini degli elementi della base:

$$\begin{aligned} T(x^2) &= T(1,0,0) = (1,k,0) = x^2 + kx \\ T(x) &= T(0,1,0) = (k,1,0) = kx^2 + x \\ T(1) &= T(0,0,1) = (0,0,k) = k \end{aligned}$$

Di conseguenza la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (k-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - k^2\right] = (k-\lambda)(1-\lambda-k)(1-\lambda+k)$$

Di conseguenza gli autovalori (non sempre distinti) sono

$$\lambda = k, \qquad \lambda = 1-k, \qquad \lambda = 1+k$$

□