CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 9– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 9.1 (v.8.37)**.** *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da*

$$T(x, y, z) = (3x - 2y,\ x + y + z,\ 2x - 3y - z)$$

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\}$.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - I \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2)\} = \{(3, 1, 2),\ (-2, 1, -3)\}$$

Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = -\frac{5}{3}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, -\frac{5}{3} \right) \right\}$$

b) Chiamiamo $v_1,\ v_2$ e v_3 i tre vettori di $\mathcal{B}$. Dalla definizione di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(2, 1, 0) = (4, 3, 1), \\ T(v_2) &= T(1, 1, 0) = (1, 2, -1), \\ T(v_3) &= T(0, 1, 1) = (-2, 2, -4) \end{aligned}$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow 2II - I \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Consideriamo ora il sistema associato alle prime 4 colonne:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y + 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$T(v_1) = (4, 3, 1) = 2v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (2, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla quinta:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$T(v_2) = (1, 2, -1) = -2v_1 + 5v_2 - 1v_3 = (-2, 5, -1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla sesta:

$$\begin{cases} 2x+y=-2 \\ y+2z=6 \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=14 \\ z=-4 \end{cases}$$

$$T(v_3)=(-2,2,-4)=-8v_1+14v_2-4v_3=(-8,14,-4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consisteva nell'utilizzare la matrice P di cambiamento di base:

$$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B=P^{-1}AP$$

□

Esercizio 9.2 (8.40)**.** *Sia* $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x,y)=(2x,x-y,2y)$*, e siano* $\mathcal{B}=\{(1,0),\ (1,1)\ \}$ *e* $\mathcal{B}'=\{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ *due basi di* $\mathbf{R}^2$ *e* $\mathbf{R}^3$ *rispettivamente. Determinare la matrice* $A=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ *associata a* T *rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$*.*

Soluzione:

La matrice A cercata ha per colonne le immagini attraverso T degli elementi di $\mathcal{B}$, espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Cominciamo a calcolare la immagini:

$$T(1,0)=(2,1,0), \qquad T(1,1)=(2,0,2)$$

I vettori cosí ottenuti sono però espressi rispetto alla base canonica. Indichiamo con

$$u_1'=(1,1,0),\ u_2'=(0,1,1),\ u_3'=(0,0,2)$$

gli elementi della base $\mathcal{B}'$. Esprimere $(2,1,0)$ e $(2,0,2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le due equazioni vettoriali: $xu_1'+yu_2'+zu_3'=(2,1,0)$ e $xu_1'+yu_2'+zu_3'=(2,0,2)$. Consideriamo quindi la matrice associata a tali sistemi, riducendola con le due colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Per risolvere l'equazione $xu_1'+yu_2'+zu_3'=(2,1,0)$ consideriamo la prima colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ 2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,0)=(2,1,0)=2u_1'-u_2'+\frac{1}{2}u_3'=\left(2,-1,\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Analogamente per risolvere l'equazione $xu_1'+yu_2'+zu_3'=(2,0,2)$ consideriamo la seconda colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ 2z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,1)=(2,0,2)=2u_1'-2u_2'+2u_3'=(2,-2,2)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.3 (8.44)**.** *Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\{(1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3)\}$ *di* $\mathbf{R}^3$.

a) *Si scriva la matrice associata a S rispetto alle basi canoniche.*
b) *Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.*

Soluzione:

a) Dalla matrice si ricava

$$S(1,1,1) = (0,0,1)_{\mathcal{B}}$$
$$S(0,2,2) = (0,0,2)_{\mathcal{B}}$$
$$S(0,0,3) = (0,1,3)_{\mathcal{B}}$$

quindi per la linearità di S:

$$S(0,0,1) = \frac{1}{3}(0,1,3)_{\mathcal{B}} = \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}}$$
$$S(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,0,2)_{\mathcal{B}} - \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)_{\mathcal{B}}$$
$$S(1,0,0) = (0,0,1)_{\mathcal{B}} - \frac{1}{2}(0,0,2)_{\mathcal{B}} = (0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$S(e_1) = (0,0,0)$$
$$S(e_2) = -\frac{1}{3}(0,2,2) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$S(e_3) = \frac{1}{3}(0,2,2) + 1(0,0,3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

dove tutti i vettori sono finalmente espressi rispetto alla base canonica, e la matrice associata a S rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 3II \\ 3III \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{\ (0,-2,-2),\ (0,2,11)\ \}$$

Per ricavare il nucleo di S risolviamo il sistema omogeneo associato a A

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{\ (1,0,0)\ \}$$

□

Esercizio 9.4 (8.18)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (2x, y, 0)$$

(1) *Dato il vettore $w = (2,-1,1)$, calcolare $T(w)$.*

(2) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
(3) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A.*
(4) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$.
(5) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$, $v_3 = (1,1,-1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
(6) *Determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza e alla base canonica $\mathcal{C}$ dello spazio di arrivo.*
(7) *Determinare le componenti del vettore $w = (2,-1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
(8) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B.*

Soluzione:

(1) Per calcolare $T(w)$ basta applicare la definizione:
$$T(2,-1,1) = (2\cdot 2, -1, 0) = (4,-1,0)$$
(2) Per calcolare A dobbiamo calcolare l'immagine dei vettori della base canonica:
$$T(e_1) = T(1,0,0) = (2,0,0)$$
$$T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$$
$$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,0)$$
La matrice A ha come colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(3) Utilizzando la matrice A si ottiene
$$T(w) = A\cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1).
(4) L'immagine di T è generata dai vettori colonna di A:
$$\mathrm{Im}(T) = \langle\ T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\ \rangle = \langle\ (2,0,0),\ (0,1,0)\ \rangle$$
Dalla matrice A, già ridotta a gradini, notiamo che solamente $T(e_1)$ e $T(e_2)$ sono linearmente indipendenti, di conseguenza l'immagine è uno spazio vettoriale generato da due vettori:
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,0,0),\ (0,1,0)\}$$
Il nucleo di T è formato da quei vettori dello spazio di partenza $\mathbf{R}^3$ la cui immagine attraverso T è il vettore nullo:
$$\mathrm{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(v) = (0,0,0)\right\}$$
Il $\mathrm{N}(T)$ è quindi formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$
Di conseguenza
$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,1)\cdot t \mid t \in \mathbf{R}\} = \langle\ (0,0,1)\ \rangle$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,0,1)\}$$
(5) Per verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$, $v_3 = (1,1,-1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ calcoliamo il rango della matrice che ha per colonne i tre vettori:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
La matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3, e l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

(6) Per determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza e rispetto alla base $\mathcal{C}$ dello spazio di arrivo, come al punto (2), calcoliamo l'immagine di v_1, v_2 e v_3 attraverso T:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,0,1) = (2,0,0) \\ T(v_2) &= T(0,1,-1) = (0,1,0) \\ T(v_3) &= T(1,1,-1) = (2,1,0) \end{aligned}$$

Notiamo che tali immagini (appartenenti allo spazio di arrivo) sono espresse come richiesto rispetto alla base canonica. La matrice B ha quindi come colonne $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(7) Per determinare le componenti (x, y, z) di w rispetto alla base $\mathcal{B}$ dobbiamo esprimere w come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$. Dobbiamo quindi risolvere l'eaquazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

Consideriamo la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Come metodo alternativo possiamo calcolare la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, ovvero la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per esprimere w rispetto a $\mathcal{B}$ dobbiamo prima calcolare $P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, la matrice di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$w_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot w^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

(8) Avendo espresso w in termini della base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ possiamo ora calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B:

$$T(w) = B \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1) e del punto (3).

□

Esercizio 9.5 (8.36)**.** *Sia* $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di* S *e una base dell'immagine di* S*.*

b) *Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori*

$$v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (1,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a S calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{c} S(e_1) = (3,4,1) \\ S(e_2) = (0,-2,0) \\ S(e_3) = (-2,2,2) \\ S(e_4) = (1,3,2) \end{array} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-4I \\ III-3I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data da

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2z + 2w = 0 \\ -2y - 6z - 5w = 0 \\ -8z - 5w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5}t \\ y = t \\ z = t \\ w = -\dfrac{8}{5}t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S)) = \{(6,5,5,-8)\}$$

b) Si tratta di esprimere $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3),\ S(e_4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Scriviamo quindi la matrice associata ai 4 sistemi $xv_1 + yv_2 + zv_3 = S(e_i)$, considerando contemporaneamente i quattro vettori:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III-I \\ II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Risolviamo ora i quattro sistemi

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y = -2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow S(e_1) = (-3,2,4)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow S(e_2) = (2,0,-2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow S(e_3) = (0,-4,2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S(e_4) = (-1,-1,3)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 9.6 (8.35)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x+y,\ 2x-y-z,\ 2y+z)$$

e sia $\mathcal{B} = \{(1,2,-4),\ (0,1,1),\ (1,0,-7)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$.*
c) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$.*
d) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) Dobbiamo in sostanza calcolare il rango di $M_{\mathcal{E}}(T) = M(T)$:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(Im(T)) = \mathrm{rg}(M(T)) = 3 \ \Rightarrow \quad T \text{ è suriettiva}$$
$$\dim(N(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M(T)) = 0 \ \Rightarrow \quad T \text{ è iniettiva}$$

b) Si tratta di calcolare le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, e scrivere la matrice che ha questi come colonne. Ciò equivale a moltiplicare la matrice $M(T)$ con la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow M(T)P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Infatti $T(1,2,-4) = (3,4,0)$, $T(0,1,1) = (1,-2,3)$, $T(1,0,-7) = (1,9,-7)$, come si può determinare usando la definizione data di T.

c) I vettori $T(e_1) = (1,2,0)$, $T(e_2) = (1,-1,2)$, $T(e_3) = (0,-1,1)$, vanno espressi nella base $\mathcal{B}$. Le coordinate dei vettori così ottenuti saranno le colonne di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$. Equivalentemente si ha che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}M(T) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -14 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix} M(T) = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 2 \\ -8 & -21 & -5 \\ -4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Siano $v_1 = (1,2,-4)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,-7)$. Dati i punti precedenti per ottenere la matrice richiesta basta fare $P^{-1}M(T)P$ per ottenere la matrice richiesta.

Se non fossero state richieste le matrici precedenti, il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

$$T(v_1) = (3,4,0), \quad T(v_2) = (1,-2,3), \quad T(v_3) = (1,9,-7)$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2 & 9 \\ -4 & 1 & -7 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 4I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 12 & 7 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 14 & 11 & -10 \end{array}\right]$$

Risolviamo ora i tre sistemi:

$$T(v_1): \begin{cases} x + z = 3 \\ y - 2z = -2 \\ -z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = -30 \\ z = 14 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (-17,-30,14)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2): \begin{cases} x + z = 1 \\ y - 2z = -4 \\ -z = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -26 \\ z = -11 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (12,-26,-11)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3): \begin{cases} x + z = 1 \\ y - 2z = 7 \\ -z = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 27 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (-9,27,10)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ -14 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.7 (9.1)**.** *Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Soluzione:

Calcoliamo $T(v)$:

$$T(1,0,0,1) = (2,\ -1+1,\ 0,\ 1+1) = (2,\ 0,\ 0,\ 2) = 2 \cdot v$$

Quindi v è autovettore associato all'autovalore 2.

□

Esercizio 9.8 (9.6)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratterristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-1-\lambda)(-1-\lambda) = (-1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di A sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico, quindi A ha un solo autovalore (doppio):

$$\lambda = -1$$

Inoltre il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (t,0) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-1) = \langle (1,0) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 con un solo autovalore linearmente indipendente.

Consideriamo la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-1-\lambda)(1-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 5 \end{aligned}$$

b) Poichè il polinomio caratteristico di B non ha zeri reali B non ha autovalori.
c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 priva di autovalori. Si noti che invece in $\mathbf{C}$ la matrice ha due autovalori distinti: $\lambda = \sqrt{5}i$ e $\lambda = -\sqrt{5}i$ ed è quindi diagonalizzabile. Una base di autovettori è data da: $\{(1+\sqrt{5}i, 3), (1-\sqrt{5}i, 3)\}$

Consideriamo la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det(C - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-3-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di C sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = -4,\; \lambda_2 = 1$$

Quindi C ha due autovalori:

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$$

Consideriamo prima $\lambda_1 = -4$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -4$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-4t, t) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-4) = \langle(-4, 1)\rangle$$

Consideriamo ora $\lambda_2 = 1$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 4II + I \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, t) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(1) = \langle(1, 1)\rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 con due autovalori distinti (di molteplicità algebrica 1), quindi C ha due autovettori linearmente indipendenti.

□

Esercizio 9.9 (9.7)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \;\Rightarrow\; (2-\lambda) = 0 \text{ oppure } (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \\ &\Rightarrow\; \lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = 2,\; \lambda_3 = 3 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\begin{aligned}&\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio}\\ &\lambda_2 = 3\end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, 0, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 3$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(3) = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione uno). Di conseguenza esistono solamente due autovettori linearmente indipendenti e non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

Consideriamo ora la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda) + 6] - 1[-7(-\lambda-2) - 6] - [-42 + 6(5-\lambda)] \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 7\lambda - 8 + 12 + 6\lambda \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - \lambda + 4 = (\lambda-4)[(-3-\lambda)(\lambda+1) - 1] \\ &= (\lambda-4)[-\lambda^2 - 4\lambda - 4] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di B sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda-4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda-4) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di B sono

$$\begin{aligned}&\lambda_1 = 4\\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{doppio}\end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ 1/6III \end{matrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 6 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (0, t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 7 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 7I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione uno). Infatti abbiamo determinato due soli autovettori linearmente indipendenti.

Consideriamo ora la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) + 9\lambda + 18 = (\lambda+2)[(1-\lambda)(\lambda-1) + 9] \\ &= (\lambda+2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di C sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda+2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ (\lambda+2) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di C sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -2 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t - s, t, s) = (t, t, 0) + (-s, 0, s) \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0), \ (-1, 0, 1) \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che C è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -12 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uno, e l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico) e ha molteplicità geometrica due (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione due).

□